COLECCIÓN
CUADERNOS DE VINCULACIÓN
Secretaría de Política y Territorio (SPyT)

UNA EXPERIENCIA DE ARTICULACIÓN EN RELACIÓN A LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA MEDIADA POR TICS

Alejandra Almirón (coord.)

Fernando Bifano
Lorena Cabaña
Leonardo Lupinacci
Carlos Pintos
Gabriel Santisi
Claudia Sturati

EDITORIAL | UNAJ

Una experiencia de articulación en relación a la enseñanza de la matemática mediada por tics / Alejandra Almirón ... [et al.] ; Compilación de Alejandra Almirón. - 1a ed. - Florencio Varela : Universidad Nacional Arturo Jauretche, 2024.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-631-90815-0-3

1. Matemática. 2. Medios de Enseñanza. I. Almirón, Alejandra II. Almirón, Alejandra , comp.
CDD 510

Colección: Cuadernos de vinculación
Tomo N°2 “Una experiencia de articulación en relación a la Enseñanza de la Matemática mediada por TICs.”
Coordinador Editorial: Ernesto Salas
Diseño interior y tapa: Gabriela Ruiz
Ilustraciones: Freepik

1ª edición digital, Noviembre de 2024

Av. Calchaquí 6200 (CP1888)
Florencio Varela Buenos Aires, Argentina
Tel: +54 11 4275-6100
editorial@unaj.edu.ar
www.editorial.unaj.edu.ar

Queda hecho el depósito que marca la Ley 11.723

CONTENIDOS

CONTENIDOS

PRÓLOGO

Dra. Carolina González Velasco, Directora del Instituto de Estudios Iniciales de la UNAJ
Dr. Julián Dércoli, Subsecretario de Política y Territorio de la UNAJ

De un tiempo a esta parte, la sociedad argentina vuelve a enfrentar la discusión sobre el valor de lo público, lo común y lo colectivo. Nuevas y viejas voces se alzan para asociarlos a lo vetusto e ineficiente y para reivindicar lo individual y privado como vectores del nuevo modelo que se pretende impulsar.

Las universidades nacionales han quedado en medio de tal debate; sin embargo, gracias a la movilización de los propios universitarios y de la solidaridad de gran parte de la sociedad, han logrado poner de relieve el lugar que estas instituciones han tenido y tienen en la experiencia de movilidad e integración social y, por tanto, en la transformación de la vida individual y colectiva. Al menos durante las últimas dos décadas, la creación de nuevas Altas Casas de Estudios, la política de becas para estudiantes y la promoción de carreras estratégicas, se convirtieron en herramientas clave para democratizar el acceso a la educación superior e impactar en el cotidiano de miles de jóvenes.

Por lo demás, siguen siendo las universidades los principales centros de producción y articulación de conocimientos de las más diversas disciplinas, conocimientos que siempre buscan de una u otra manera, promover una mejora en la vida de las comunidades. De hecho, es posible notar un cambio en la concepción de los propios universitarios respecto a su rol en la sociedad. Así, las universidades, y en particular las del Bicentenario, han hecho del trabajo con y para sus comunidades de referencia un horizonte ineludible.

Una muestra de lo dicho es el libro que presentamos a continuación: una serie de textos que ponen en valor la tarea realizada de manera conjunta entre docentes de la universidad y docentes de instituciones educativas de nuestra región. Se trata de un trabajo colectivo que es el resultado de la apuesta por el diálogo y el intercambio de experiencias, con el objetivo común de mejorar la enseñanza de la matemática y fortalecer el vínculo entre las aulas de la universidad y de las escuelas. Con la convicción que esta perspectiva será la que nos permitirá aminorar una de las problemáticas más sensibles del sistema universitario argentino: el abandono de los estudios en el primer año.

En síntesis, este libro es una muestra de cómo trabajan nuestras universidades, cuál es su compromiso con el derecho a la educación y con el desarrollo del conocimiento como bien público y social, cómo dialogan con otros actores y cómo buscan que la producción de esos conocimientos redunde, en este caso, en una mejora de las experiencias educativas de jóvenes de la región. Por todo esto, estamos contentos de presentar esta nueva publicación de Cuadernos de Vinculación que significa un insumo para nuestra comunidad, pero también un aporte para la defensa de nuestras universidades nacionales.

ACERCA DE LA ARTICULACIÓN

Alejandra Almirón

En el marco del Proyecto de Mejora de la Formación en Ciencias Exactas en la Escuela Secundaria[1], las y los docentes de la materia Matemática Inicial del Instituto de Estudios Iniciales de la Universidad Nacional Arturo Jauretche (UNAJ) implementamos encuentros de articulación entre profesoras y profesores de los dos niveles educativos. Matemática Inicial es una materia que las y los estudiantes universitarios deben cursar en el primer año de todas las carreras que se dictan en la universidad y tiene por objetivo acercar esta disciplina a la comunidad. Nos planteamos desarrollar en las aulas una matemática crítica, donde se pueda partir de los saberes previos para potenciarlos y construir nuevos conocimientos. Esta misma propuesta es la que nos propusimos socializar con docentes de las escuelas secundarias de la zona. Elegimos trabajar sobre la incorporación de la tecnología a las aulas de matemática, como un desafío que nos invita a repensar nuestras prácticas como docentes en ambos niveles educativos.

El proyecto constó de dos instancias. En la primera, las y los docentes universitarios fuimos apropiándonos de las herramientas tecnológicas (en particular utilizamos GeoGebra que es un software de geometría dinámica diseñado especialmente para la enseñanza) para poder producir una serie de problemas y ana-

1 Plan Plurianual mediante el cual la Secretaria de Políticas Universitarias convocó a las Universidades Nacionales para trabajar en conjunto con las Escuelas Secundarias para promover el mejoramiento de la calidad de la enseñanza de las Ciencias Exactas, Ciencias Naturales y Tecnología en ese nivel.

lizar el impacto de la inclusión de estos recursos en las aulas desde una mirada particular de la didáctica de la matemática. Fueron encuentros donde discutimos cuál sería el marco teórico que sustentaría el proyecto, leímos bibliografía y analizamos prácticas previas, para generar luego una experiencia de autoformación para trabajar los distintos temas y las diversas herramientas que se pueden utilizar en el aula. A partir de la exploración, las discusiones y el análisis, desarrollamos una guía de problemas para poner en práctica con las y los docentes de la escuela secundaria. Esta fue modificándose encuentro a encuentro a partir de la observación surgida en cada reunión. Creemos que esta primera etapa fue fundamental y enriquecedora, ya que nos permitió generar espacios de horizontalidad donde discutir entre pares e intentar identificar las necesidades existentes en relación al uso de las nuevas tecnologías, las transformaciones que se producen en la organización de la clase y del lugar que ocupan diversas y diversos actores en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En la segunda etapa del proyecto se realizó el intercambio entre docentes de los dos niveles educativos que constó de tres encuentros presenciales anuales en la universidad durante tres años. Fueron conformados grupos de trabajos donde se analizó y discutió en relación a los problemas elaborados en la primera instancia. La dinámica de los encuentros fue comenzar analizando los problemas propuestos, intercambiando acerca de los distintos tipos de resolución posible, los obstáculos encontrados, las posibles soluciones, las distintas herramientas que brinda el programa GeoGebra, etc.; para luego analizar si era un problema viable de ser trabajado con las y los estudiantes, cuáles serían las modificaciones posibles para hacerle, qué potencialidad tenía, cuáles eran las diferencias o similitudes de trabajarlo con lápiz y papel o con el software, etc. Un eje importante en todos los encuentros era pensar nuestro rol docente al trabajar con problemas que ponían a la y el estudiante en un rol protagónico que construye los conocimientos matemáticos. En ese sentido, se pensaban posibles intervenciones docentes frente a distintas situaciones que podían surgir en el aula al proponer el trabajo con los problemas compartidos. Luego se socializaba todo lo intercambiado entre los diversos subgrupos en lo que llamábamos la puesta en común, de modo de concluir entre todas y todos los aportes o limitaciones que nos traía el uso de las tecnologías en relación a lo expuesto anteriormente.

Rápidamente evidenciamos distintas problemáticas en torno a la inserción de las computadoras en la enseñanza, en relación con las dificultades operativas para trabajar con ellas en las aulas (disponibilidad de equipos funcionales, tiempos de conexión…). Del intercambio fue apareciendo la posibilidad de trabajar con los celulares de las y los estudiantes. Esta iniciativa potenció nuestro trabajo ya que las y los docentes manifestaron interés en incorporar los teléfonos como una herramienta útil para el aprendizaje de matemática y correrlo del lugar de distracción y evasión de la clase.

Este trabajo, a lo largo de los tres años que duró el proyecto, fue rompiendo el prejuicio de la distancia que existe entre ambos niveles educativos y permitiendo que el intercambio fuera cada vez más significativo. Desde una primera instancia las y los docentes de la universidad nos planteamos una articulación con las y los profesoras y profesores del nivel secundario donde pudiéramos intercambiar como pares, rompiendo con la demanda inicial de informar qué contenidos requeríamos en la universidad para el ingreso de las y los estudiantes al nivel superior.

De ese modo, propusimos un espacio horizontal donde compartir las problemáticas y alcances que tiene cada persona, para pensar en conjunto qué entendemos por enseñar y aprender matemática, cómo gestionar nuestras clases, qué cambios en los contenidos matemáticos incorpora el uso de las tecnologías, qué nuevos aspecto hay que tener en cuenta y cuáles de los viejos tendremos que revisar y transformar.

En consecuencia, no nos propusimos un curso para aprender a usar un software, en este caso GeoGebra, sino reflexionar acerca de las potencialidades y limitaciones para su uso en la enseñanza. Por lo tanto, el mismo se utilizó como una herramienta más (así como el lápiz y papel) que nos permita acercarnos a la construcción de conocimientos. Muchas discusiones se centraron en torno a cuáles eran las características específicas de la utilización de ambos entornos, en función de lo que aportaba cada uno para el objetivo particular de cada problema.

Fue significativo que el intercambio generó en docentes de ambos niveles la posibilidad de llevar algún o algunos de los problemas trabajados en los encuentros a sus aulas, para luego compartir la experiencia con el resto del grupo. En algunos casos, se trataba de docentes que trabajaron por primera vez con la computadora en sus clases.

En ese sentido, nuestro interés en incorporar la tecnología en la clase se centraba en la posibilidad que nos brinda esta herramienta tan disruptiva para repensar nuestras prácticas y redefinir qué entendemos por enseñar y aprender matemática. Se hizo evidente en los encuentros que, a partir de contar con este recurso, la clase no podía seguir siendo la misma, por ello nos pareció que analizarla en conjunto nos permitía introducir el modo en que entendemos por hacer matemática con estudiantes protagonistas de su aprendizaje. Para ello, los problemas propuestos deben invitar a la investigación para la construcción de conocimiento, ocupando el y la docente el lugar de acompañante de las y los estudiantes para incentivar y organizar ese aprendizaje.

A lo largo de los tres años que duró el proyecto, fuimos evaluando la propuesta y transformándola. Un recurso que nos resultó muy útil para poder hacerlo fue la producción y análisis de las bitácoras de cada encuentro. Estas son reseñas que producíamos las y los docentes de la universidad, con la mayor cantidad de detalle posible para que funcionara como memoria de lo discutido.

Este registro nos permitió, en el corto plazo, la posibilidad de repensar nuestras prácticas en función de las demandas que visualizábamos, los obstáculos que emergían y las nuevas iniciativas que surgían. Por ejemplo, nos incentivó a incorporar en las guías de trabajo un apartado a continuación de cada problema al que llamamos "Entre pares". En el mismo invitábamos a realizar un análisis didáctico de la situación problemática para profundizar en los aspectos pedagógicos y corrernos del lugar de docentes de la escuela secundaria aprendiendo de las y los docentes universitarios. En este sentido sostuvimos la idea de que las y los estudiantes de los últimos años de la secundaria y de los primeros años de la universidad son muy similares, y ambos niveles podemos enriquecernos de la experiencia del otro. Otra iniciativa que fuimos poniendo en práctica a partir del análisis de las reseñas fue la de incorporar los espacios para compartir las experiencias en las aulas con el trabajo de los problemas socializados en encuentros anteriores.

En el largo plazo, tener las bitácoras de todo el proceso nos permitió analizar e identificar los logros obtenidos en función de la evolución del intercambio entre las y los docentes y sus producciones.

Así mismo, la lectura de estos registros que recuperan las voces de los distintos actores participantes, habilitó no solamente la reconstrucción de lo sucedido sino que se convirtió en un recurso que creemos valioso para socializar con todas aquellas personas que se dediquen a la enseñanza de la matemática.

En ese sentido, al comenzar el proyecto elegimos trabajar con matemática y TICs a partir del impacto que el Programa Conectar Igualdad[2] había generado en las escuelas secundarias, leyendo la demanda que existía desde el sistema educativo en pensar en torno a las dificultades didácticas para la incorporación de las TICs en el aula de matemática. Esto se potenció fuertemente durante la pandemia que transitamos a lo largo de 2020 y 2021 donde la virtualización forzada de la educación acentuó la necesidad de pensar los recursos tecnológicos a la hora de pensar nuestras clases.

A partir de este contexto y de releer las bitácoras producidas en los encuentros de articulación, encontramos en ellas un insumo que consideramos muy valioso para realizar este cuaderno de vinculación. Por ello, en el próximo apartado les presentaremos un pequeño recorrido histórico sobre la incorporación de nuevas tecnologías en la educación matemática para comprender la importancia de las mismas. Finalmente, en el apartado siguiente, que fue pensado y elaborado colaborativamente entre profesores de la escuela secundaria y de la universidad, encontrarán herramientas, discusiones y reflexiones extraídas de esas bitácoras. En ese sentido, tanto las diversas personas que participaron de los encuentros podrán encontrar sus voces, y los y las lectores y lectoras podrán recorrer los distintos pensamientos que convivieron en cada encuentro. Agradecemos a cada una y cada uno que participó y dio su aporte para enriquecer el análisis que a continuación compartimos.

2 Conectar Igualdad fue un programa nacional creado en 2010 que tenía como objetivo dar recursos tecnológicos a quienes asistían a las escuelas públicas de gestión estatal de todo el país para incorporar esos recursos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA CON RECURSOS TIC

Fernando Bifano y Leonardo Lupinacci

Pensar la enseñanza de la matemática con Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) supone primero establecer o considerar el trabajo de las profesoras y los profesores con los diferentes recursos para planificar y llevar adelante sus clases. La palabra "recurso" significa, según su origen, volver a la fuente en tanto aquello que alimenta la tarea docente. Autores como Adler (2000) consideran el término en un sentido amplio: no solo algo material o concreto como puede ser un libro de texto o un problema, sino también algo de carácter socio-cultural como un intercambio con colegas. Lo material y lo socio-cultural constituyen parte de los recursos. A partir de esta apertura sobre aquello que nutre el trabajo docente, puede entenderse que existe un repertorio amplio de diferentes recursos de los cuales las profesoras y los profesores/as se valen para pensar y llevar adelante la enseñanza.

En este marco, la utilización de recursos TIC en la enseñanza de la matemática es un tema de estudio desde hace varios años. Por un lado, emergen a priori ciertas características potentes de estos recursos en cuanto a su uso en las aulas. A su vez, se abren interrogantes acerca de posibles modificaciones que operan en el quehacer matemático que estas tecnologías median: ¿En qué medida —si es que lo hacen- se modifican las técnicas de resolución posibles con estos entornos en contraposición de los procedimientos en lápiz y papel? ¿Tiene sentido plantear, desde la enseñanza, las mismas tareas que se plantearían en el entorno de lápiz y papel?

Analicemos estas cuestiones desde una perspectiva histórica. Para la realización de una misma tarea las herramientas evolucionan continuamente y la apropiación de las nuevas herramientas no es inmediata, coexistiendo lo nuevo y lo antiguo durante períodos de tiempo que pueden ser largos (Trouche; 2009), no solo en el trabajo de cálculo cotidiano, sino también en las aulas en cuanto a recursos de enseñanza.

Pensemos por ejemplo en las relaciones trigonométricas. Estas relaciones se remontan a épocas muy antiguas de la historia de la matemática, siendo que tanto egipcios como babilónicos estudiaron distintos problemas relacionados con la trigonometría. En particular, durante los siglos VI y V a.C., los babilónicos acumularon gran cantidad de datos astronómicos, datos que permitieron posteriormente a los matemáticos griegos la construcción de la trigonometría en cuanto a cuerpo de conocimiento (Collette, 1985).

Si bien los griegos no conocían lo que hoy determinamos como razones trigonométricas, utilizaron líneas trigonométricas en formas de cuerdas de arco de círculos. En ese sentido Hiparco (siglo II a.C.), considerado el fundador de la trigonometría propiamente dicha, tomó la herencia de los babilonios en cuanto a la división del círculo en 360° y desarrolló una tabla de cuerdas precursora de la tabla de senos.

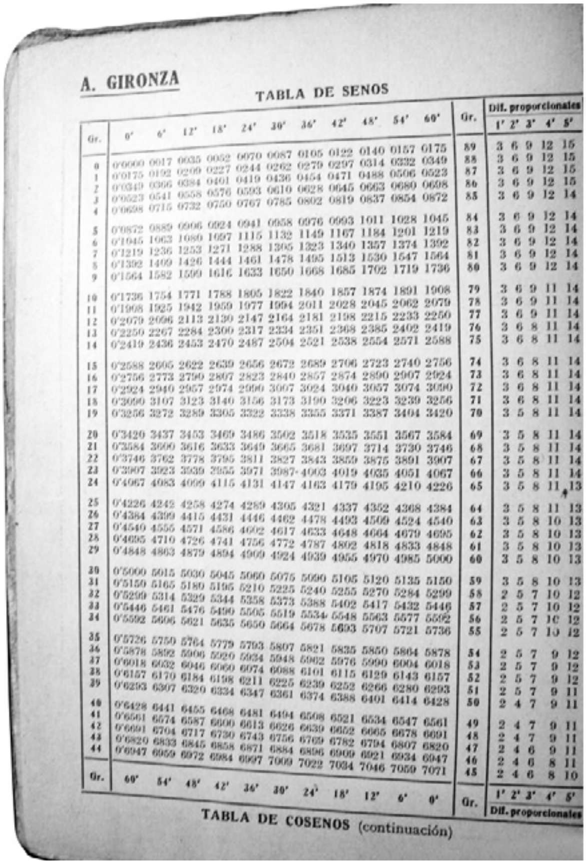
Será Ptolomeo (siglo II d.C.), sobre la base de los trabajos anteriores y del sistema sexagesimal babilonio, quien desarrolle una tabla de senos propiamente dicha. Podemos sintetizar los desarrollos de Ptolomeo de la manera siguiente: en primer lugar obtiene, mediante proporciones geométricas, diferentes relaciones e igualdades que en notación actual derivan en lo que conocemos como identidades trigonométricas; en particular las correspondientes al seno de la suma o diferencia de dos ángulos y al seno y coseno del ángulo mitad.

Mediante polígonos inscriptos en circunferencia y sus ángulos centrales, obtiene el seno y coseno de 30° y 36°, obteniendo luego con las identidades halladas, el seno y coseno de 6° y 3°. De esta manera obtiene estas relaciones para todo ángulo múltiplo de 3°. Realiza luego una aproximación del seno y coseno de 1° (con una precisión de 5 cifras decimales), lo que le permite calcular, con las expresiones del seno de la suma y la diferencia de dos ángulos, los valores de los senos y cosenos restantes para ángulos enteros (y también para algunas fracciones de ellos) (Boyer, 1986).

Estas tablas desarrolladas por Ptolomeo se conservan en la actualidad, así como la explicación de su construcción y las indicaciones para su uso, convirtiéndose en la referencia fundamental durante muchos siglos en cuanto a contenido trigonométrico, siendo mejoradas recién a finales de la edad media (Collette, op. cit.).

Así, tablas de relaciones trigonométricas, tanto las desarrolladas en la antigüedad como las posteriores mejoras, se convirtieron en un recurso tanto de cálculo —por ejemplo, para aplicaciones astronómicas- como en recursos educativos en ámbitos académicos. Contando con la referencia de la tabla y con distintas identidades trigonométricas que pudieran vincular los valores de las tablas, sería posible encontrar los valores de las relaciones trigonométricas de distintos ángulos por más que ellos no estuvieran expresados en las tablas. De hecho, versiones modernas de estas tablas estuvieron muy presentes en la enseñanza secundaria tanto de nuestro país como del resto del mundo durante gran parte del siglo XX en cuanto recurso de cálculo —y objeto de estudio en sí mismo en relación a su uso-.

Figura 1



A. GIRONZA

TABLA DE SENOS

Gr.	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	Gr.	Dif. proporcionales 1'	2'	3'	4'	5'
0	0'0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89	3	6	9	12	15
1	0'0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88	3	6	9	12	15
2	0'0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87	3	6	9	12	15
3	0'0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86	3	6	9	12	15
4	0'0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0872	85	3	6	9	12	14
5	0'0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84	3	6	9	12	14
6	0'1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83	3	6	9	12	14
7	0'1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82	3	6	9	12	14
8	0'1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81	3	6	9	12	14
9	0'1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	1736	80	3	6	9	12	14
10	0'1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79	3	6	9	11	14
11	0'1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78	3	6	9	11	14
12	0'2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77	3	6	9	11	14
13	0'2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76	3	6	8	11	14
14	0'2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	2588	75	3	6	8	11	14
15	0'2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74	3	6	8	11	14
16	0'2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73	3	6	8	11	14
17	0'2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72	3	6	8	11	14
18	0'3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71	3	6	8	11	14
19	0'3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3420	70	3	5	8	11	14
20	0'3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69	3	5	8	11	14
21	0'3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68	3	5	8	11	14
22	0'3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67	3	5	8	11	14
23	0'3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66	3	5	8	11	14
24	0'4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	4226	65	3	5	8	11	13
25	0'4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64	3	5	8	11	13
26	0'4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63	3	5	8	10	13
27	0'4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62	3	5	8	10	13
28	0'4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61	3	5	8	10	13
29	0'4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	5000	60	3	5	8	10	13
30	0'5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59	3	5	8	10	13
31	0'5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58	2	5	7	10	12
32	0'5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57	2	5	7	10	12
33	0'5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56	2	5	7	10	12
34	0'5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55	2	5	7	10	12
35	0'5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54	2	5	7	9	12
36	0'5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53	2	5	7	9	12
37	0'6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52	2	5	7	9	12
38	0'6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51	2	5	7	9	11
39	0'6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50	2	4	7	9	11
40	0'6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49	2	4	7	9	11
41	0'6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48	2	4	7	9	11
42	0'6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47	2	4	6	9	11
43	0'6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46	2	4	6	8	11
44	0'6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	7071	45	2	4	6	8	10
Gr.	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	Gr.	1'	2'	3'	4'	5' Dif. proporcionales

TABLA DE COSENOS (continuación)

Tabla de Senos y Cosenos de la década de 1960

Por otro lado, desde la década de 1970 fueron surgiendo y popularizándose distintos modelos de calculadoras digitales "científicas" compactas, las cuales desde los ámbitos laborales y técnicos fueron ingresando a los distintos niveles educativos. Surgía así un nuevo recurso —en cuanto a instrumento de cálculo- que permitía obtener de manera instantánea diversas relaciones trigonométricas para cualquier medida de ángulo, sin la necesidad de recurrir a una tabla ni a la aplicación de identidades.

Durante muchos años las calculadoras convivieron en el ámbito educativo con las tablas, pero paulatinamente las primeras se fueron popularizando (por diversos factores, entre ellos la reducción de tamaño, el abaratamiento de costos…) reemplazando a las técnicas asociadas a la lectura y manipulación de valores de una tabla.

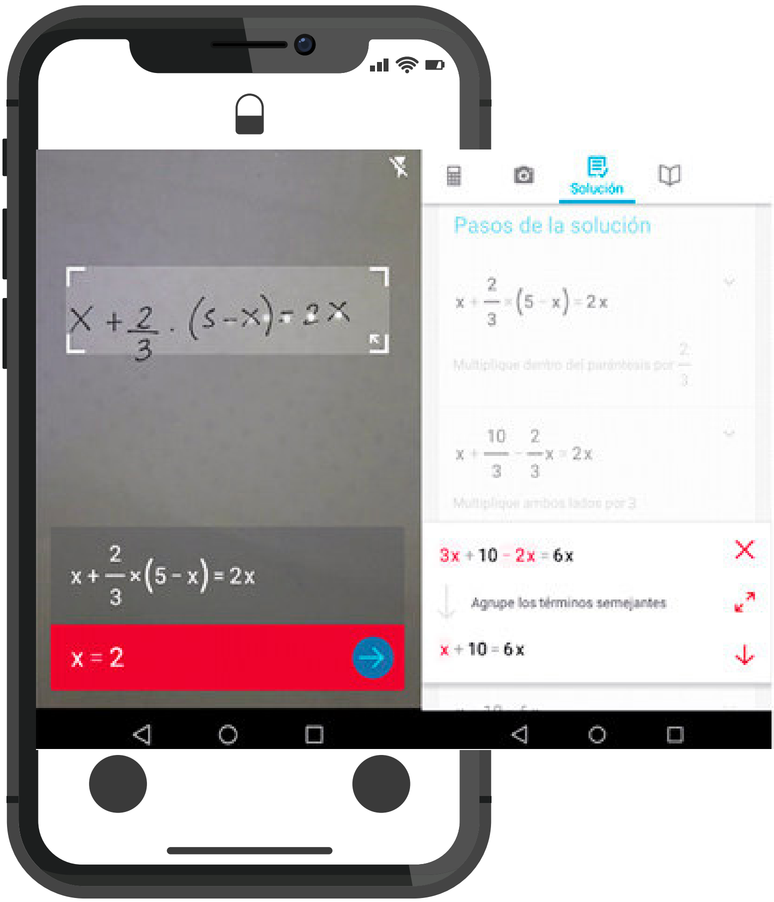
Una cuestión relevante que se pone de manifiesto en este ejemplo: la inserción de las tecnologías —calculadoras científicas en el caso presentado- no solo impactan en las técnicas de cálculo y resolución, sino que operan en la propia razón de ser de los objetos matemáticos a enseñar. Nos referimos en particular a las identidades trigonométricas, como por ejemplo las expresiones para calcular los senos o cosenos de la suma o diferencia de dos ángulos. No ponemos en discusión las diversas aplicaciones que estas expresiones puedan tener o los problemas matemáticos que a través de ellas se puedan resolver. Pero durante mucho tiempo, la razón de ser de la enseñanza y utilización de estas expresiones en la educación secundaria, estuvo supeditada a su uso para la lectura de tablas de razones trigonométricas. Así, a partir de la lectura de las tablas y la aplicación de estas expresiones, era posible obtener razones trigonométricas de ángulos cuyas razones no estuvieran explicitadas.

Se trata de una razón de ser que le dio vida antaño en la escuela secundaria y, eliminada esta vinculación, el estudio de la obra matemática en sí misma se convierte en un *monumento* (Chevallard, 2013) que uno visita, que es reverenciado per se y no en función de las tareas y los problemas que permite resolver. Para que dicha obra siga viva en la escuela, habrán de encontrarse nuevos sentidos, nuevas vinculaciones y nuevas situaciones donde la misma tome relevancia.

Presentado este ejemplo histórico, podemos extrapolarlo a la actualidad. Hoy en día existe una gran diversidad de recursos tecnológicos disponibles para que las y los docentes los seleccionen y adecuen a sus propósitos didácticos. En particular podemos detenernos en recursos de software, los cuales pueden ser utilizados en distintas plataformas —PC, tablets, celulares…- habiendo sido desarrollados originalmente con fines tanto profesionales —las planillas de cálculo o los programas de cálculo algebraico- como educativos —los software de geometría dinámica-.

Esta variedad de software permite la realización de diversas tareas de cálculo, exploración y construcción de objetos y nociones matemáticas. Por ejemplo, existen en la actualidad aplicaciones para teléfonos celulares que, con solo enfocar la cámara del teléfono sobre una ecuación escrita a mano sobre el pizarrón o una hoja, son capaces de dar tanto su resultado como el procedimiento realizado para llegar a él.

Figura 2



Aplicación de celular que permite resolver (paso a paso) las ecuaciones con solo enfocarlas

¿Esto supone que este tipo de recursos reemplazará a las técnicas de resolución de ecuaciones realizadas “a mano”? Consideramos que no necesariamente, ya que si bien no podemos anticipar cómo evolucionarán y cuál será su inserción en el ámbito educativo, la resolución de ecuaciones mediante técnicas clásicas podrá seguir viva en tanto posea una razón de ser en los ámbitos profesionales y sociales y, por lo tanto, en los educativos.

Lo que sí es posible afirmar es que, de considerar estos recursos para las prácticas de enseñanza, los tipos de tareas a proponer requerirán de cambios respecto a las planteadas para ser resueltas en lápiz y papel. En otras palabras, contar con un recurso que de forma sencilla y rápida permite obtener la resolución y el resultado de una ecuación, convierte en una actividad trivial tareas del tipo “resolver la siguiente ecuación”. Serán las y los docentes que seleccionen este tipo de recursos para el desarrollo de sus clases quienes, de acuerdo a sus propósitos didácticos, deberán vincular el recurso tecnológico con actividades que permitan explotarlos didácticamente. En este caso particular, la interpretación tanto de los resultados obtenidos como de la información devuelta por la aplicación, podría ser un eje para el diseño y selección de actividades.

Detengámonos ahora en los softwares de geometría dinámica. Estos entornos, donde se incluyen ejemplos tales como Cabrí, GeoGebra, CaRMetal, Cindirella y Cassyopée entre otros, tiene como característica distintiva la coexistencia de elementos propios del dibujo puro y de elementos geométricos. Esto permite interactuar con los objetos construidos en tiempo real y visualizar las transformaciones en relación a las propiedades geométricas utilizadas para cada construcción. Algunos de ellos, como GeoGebra, tuvieron su origen con la intencionalidad de integrar geometría y álgebra. Evolucionando luego con la posibilidad de visualizar simultáneamente diversos marcos de representación como el algebraico, el gráfico (que incluye geometría métrica y analítica), el numérico (a partir de la planilla de cálculo) y el procesamiento simbólico o el Sistema de Álgebra Computacional (CAS) (que permite obtener y manipular expresiones algebraicas en una notación similar a la estructura matemática convencional).

Así, se establecen a priori como las principales características de estos entornos para el tratamiento del conocimiento matemático, por un lado por las potencialidades dinámicas y la posibilidad de manipulación en tiempo real, propiciando las actividades de experimentación y conjeturación; por otro, por su condición de conector entre múltiples representaciones (permitiendo crear lazos entre distintos marcos), potenciando la visualización.

Estas características nos invitan a pensar qué tipos de problemas son factibles de ser presentados en estos entornos para explotar didácticamente sus potencialidades. Pensar, dado un conocimiento matemático en particular, en cuáles son las técnicas asociadas a ese conocimiento que son posibles de desarrollar a partir de estos softwares, analizando también su vinculación con las técnicas habituales realizadas con lápiz y papel.

Precisamente las páginas que siguen son fruto de esas reflexiones. Docentes del nivel secundario y universitario pensando juntos en la inserción de la tecnología en la enseñanza de la matemática. Analizando el caso particular del software de geometría dinámica GeoGebra y cómo el mismo media el conocimiento matemático. Las lectoras y los lectores encontrarán distintas actividades matemáticas —algunas diseñadas originalmente para ser resueltas con lápiz y papel y otras específicamente diseñadas para ser trabajadas a partir de la utilización del software-, de las que se desprenden diversos análisis didácticos centrados en la utilización de la herramienta informática para su resolución. Análisis que recuperan las voces de la diversidad de actores que participaron en los encuentros de articulación y que, seguramente, podrán ser ampliados, profundizados y resignificados a partir de su propia experiencia docente y su conocimiento profesional.

Referencias

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics teacher Education,* n° 3, pp. 205-224.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Chevallard, I. (2013). *La matemática en la escuela.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Collette, J. P. (1993). *Historia de las matemáticas.* México: Siglo XXI Editores.

Trouche, L. (2009). Recursos para procesar, aprender, enseñar el cálculo: nuevos modos de concepción y difusión. *Tercer Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo.* Saltillo (CUA).

¿LOS PROBLEMAS DE LA ARTICULACIÓN? DOCENTES DE ESCUELA MEDIA Y UNIVERSIDAD PENSANDO JUNTOS

Alejandra Almirón, Lorena Cabaña, Carlos Pintos, Gabriel Santisi y Claudia Sturati

Introducción

Como docentes intentamos ofrecer a nuestras y nuestros estudiantes diversos problemas que les brinden la posibilidad de "hacer matemática". Los mismos pueden ser útiles para modelizar ciertas situaciones y de este modo dar un sustento a los conceptos que deseamos trabajar. Cabe aclarar que no necesariamente un buen problema diseñado para ser trabajado en lápiz y papel también lo será para el trabajo con GeoGebra, es por ello que a lo largo de todo este capítulo intentaremos resaltar en qué ocasiones es conveniente su uso desde una perspectiva didáctica. Así como también, en qué casos el uso de las herramientas que brinda este software enriquece la resolución de los problemas planteados.

Para la selección de las situaciones partimos de la concepción de problema que brindan Segal y Giuliani (2008), quienes afirman que para que un problema genere actividad matemática debe presentar cierta complejidad, admitir distintos procedimientos y dar lugar a la toma de decisiones. Teniendo en cuenta que no cualquier enunciado con una pregunta reúne estas condiciones.

Los problemas que se presentan a continuación son solo una selección de los trabajados en los encuentros de intercambios entre docentes de ambos niveles educativos. En las páginas que siguen expondremos distintas resoluciones que se desarrollaron en ellos así como diversas reflexiones y aspectos que nos parecen significativos compartir. Seguramente las y los lectores podrán enriquecer los análisis aquí presentados, realizar adecuaciones necesarias a los problemas para la presentación en sus propios cursos o tomar ideas de ellos para el diseño de nuevas actividades.

A lo largo de la lectura, por la propia necesidad del uso, irán encontrando distintas herramientas que nos brinda el software GeoGebra con su correspondiente explicación para facilitar la incorporación de este recurso en las aulas.

a. El intercambio entre docentes

Seleccionamos en este apartado dos problemas de exploración a partir del uso del software GeoGebra para poder vislumbrar las diversas posibilidades que nos brinda el programa para indagar e investigar los conocimientos matemáticos. Verán que el objetivo siempre está puesto en explorar los conocimientos de esta ciencia, y no centrados en desarrollar habilidades en el uso de la herramienta.

Problema 1:

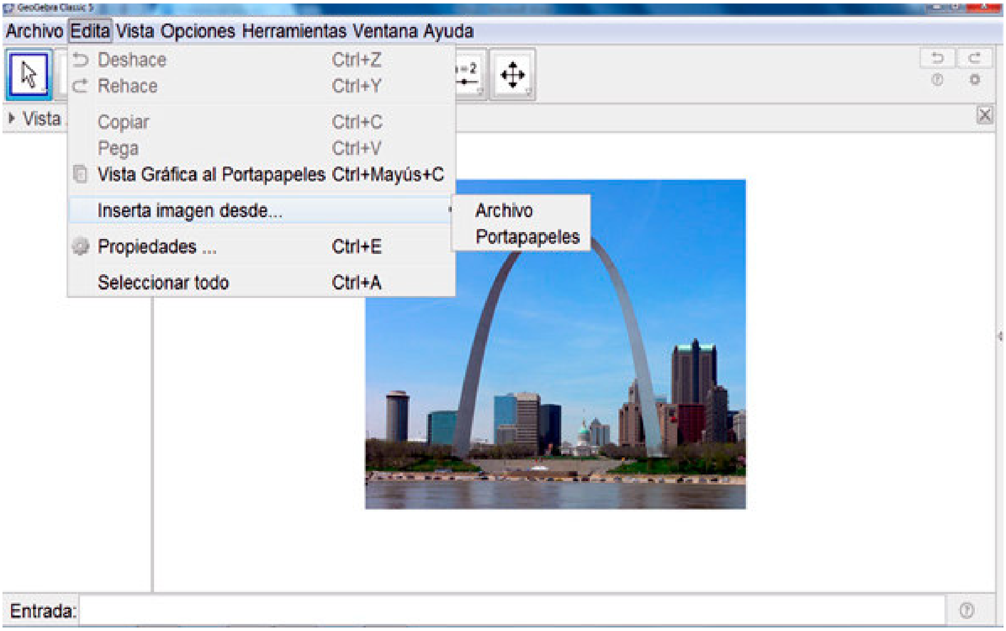
El Arco Gateway

Partiendo de una imagen de *El arco Gateway de Eero Saarinen*[1] analizamos como insertarla en GeoGebra y pensamos entre todos y todas cuáles podrían ser los usos didácticos de las imágenes insertas en el software.

Una opción posible para insertar imágenes en GeoGebra es seleccionar la opción *insertar imagen* desde la pestaña *Editar* donde aparecerán dos opciones: archivo y portapapeles. Con la primera de ellas se puede acceder a los archivos guardados en la Pc y con la segunda se puede pegar una imagen copiada previamente de algún sitio Web (Figura 1).

1 El Arco de Gateway es un monumento diseñado por el arquitecto finlandés-estadounidense Eero Saarinen y el ingeniero de estructuras alemán Hannskarl Bandel que fue inaugurado en 1965 en la ciudad de San Louis, Estados Unidos.

Figura 1

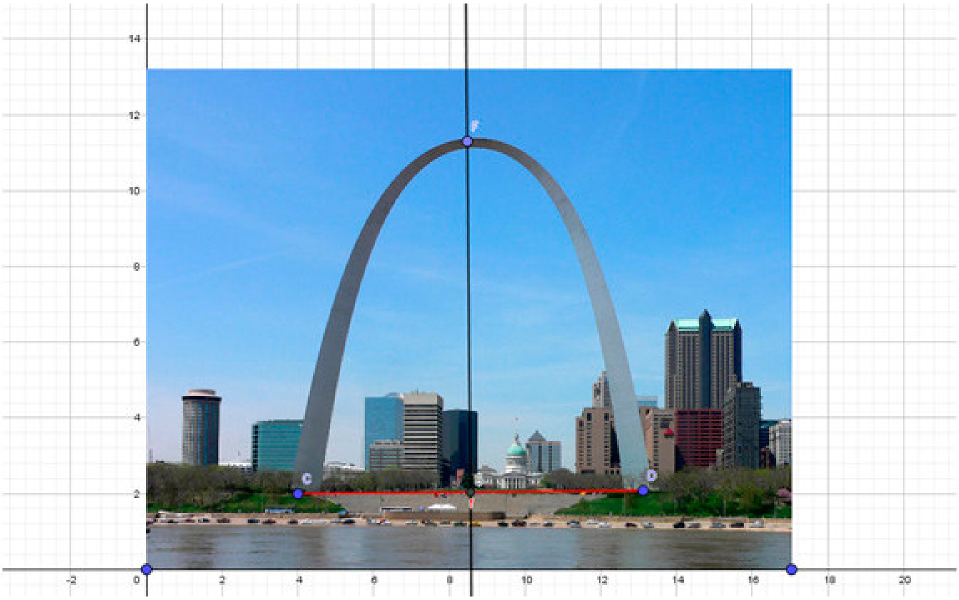


Cómo insertar una imagen en la vista gráfica del programa

Durante la implementación en el encuentro, socializamos la imagen a través de pendrives y una vez que todas y todos contaban con la imagen insertada en el programa las y los profesores/as se situaron en el rol de estudiantes investigadores e hicieron algunas anticipaciones respecto a la imagen.

En un grupo (Figura 2) pensaron que sería una función cuadrática la que podría modelizar la situación ya que el arco parecía ser una parábola. Luego, fueron verificando si el arco lo era basándose en la búsqueda de algunas características de esta curva como lo son el eje de simetría y el vértice. Para eso algunos/as marcaron un segmento en la base del arco, su punto medio y la recta perpendicular al segmento que para por ese punto. Así encontraron el vértice indicando el punto donde esa recta corta al arco. Ahí se discutió sobre si encontrando ese punto era suficiente para determinar que una parábola describía esa curva.

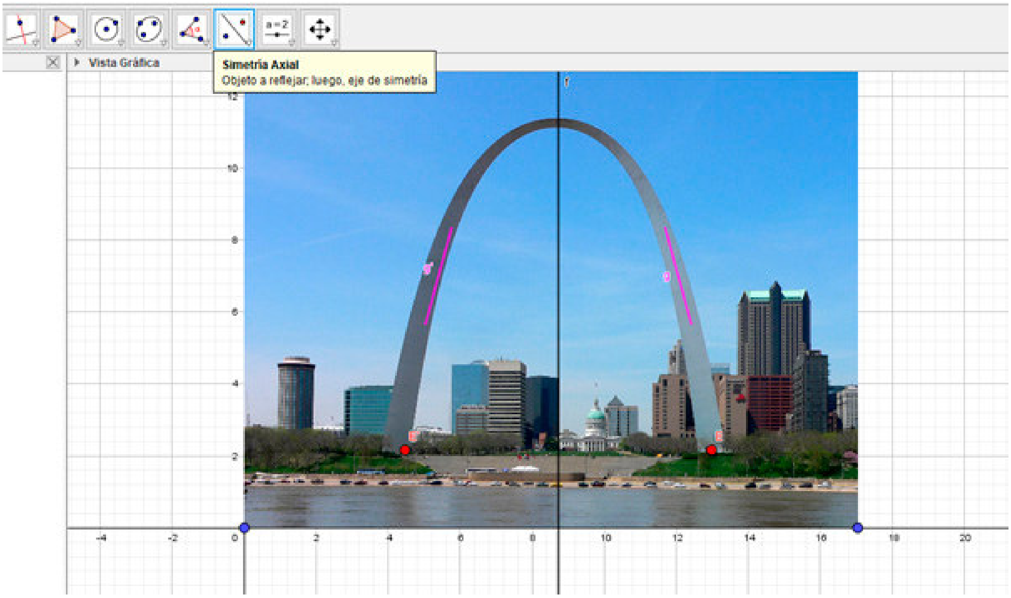
Figura 2



A partir de los puntos c y d se trazó un segmento y la perpendicular que pasa por su punto medio. El punto f representaría el vértice de la parábola.

Otras y otros (Figura 3) utilizaron las herramientas de simetría que brinda el programa. Marcando una recta como el eje de simetría de la parábola que pase por el vértice, un punto (en la imagen a continuación lo llamamos E) y un segmento (g); se puede obtener el punto y segmento simétrico (E`y g`) que deberían coincidir con el otro brazo de la parábola. Esto permitió verificar que la curva sí tenía un eje de simetría, pero que eso tampoco alcanzaba para afirmar que era una parábola.

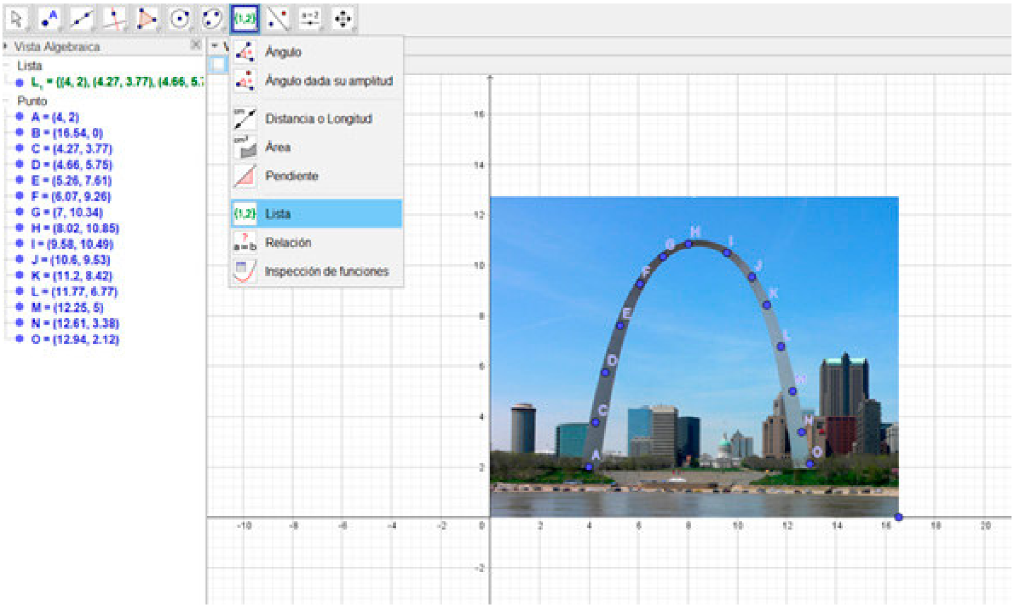
Figura 3



Verificación a través de la simetría axial que se encuentra disponible en el menú como lo muestra la imagen.

Otro grupo de docentes sugirió al conjunto formar una lista de puntos que pertenezcan a la supuesta parábola (Figura 4). Las y los participantes crearon en sus computadoras listas diferentes ya que se modificaba a partir de marcar previamente más o menos cantidad de puntos sobre la imagen; ser más o menos precisos; basarse en el centro del arco, sobre el interior o el exterior; diversas cuestiones modificaban el resultado. Esto enriqueció la discusión. Una vez marcados los puntos que pertenecen a la curva descrita por la imagen, se crea una lista de puntos ingresando en la herramienta ***Listas*** y seleccionando todos los puntos. Esta lista de puntos no se verá en la vista gráfica, pero sí podremos reconocer que el programa los agrupó en la vista algebraica ya que aparecerá el conjunto de puntos al que llamará por defecto $\mathbf{L_1}$.

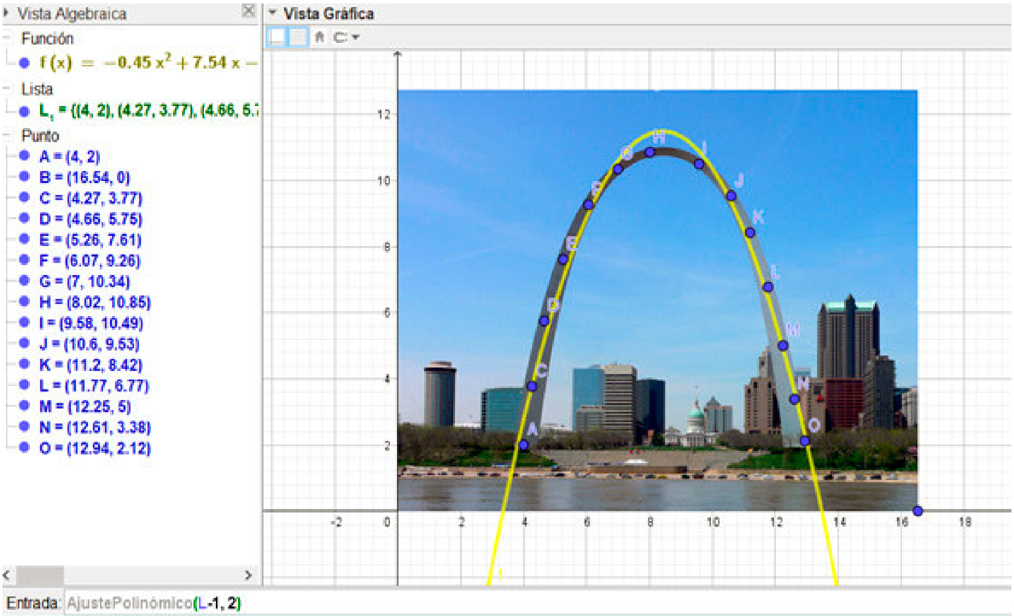
Figura 4



En la vista gráfica se puede observar cómo primero se marcaron los puntos sobre la curva de la imagen, dónde encontrar luego la herramienta Lista, para que finalmente el programa cree en la vista algebraica a L_1 que se visualiza en verde en este caso.

Luego, se aprovechó una herramienta que tiene el programa para aproximar esta lista de puntos a una función. Para hacerlo hay que elegir previamente a qué función se va a aproximar. Todos y todas optaron por la función polinómica de grado dos (la parábola). Esto se realiza a través de la barra de entrada del programa. Ingresando la palabra ***ajuste***, el software ofrece distintas opciones para realizarlo. Por ejemplo para obtener el ajuste a una función cuadrática, se debe introducir ***AjustePolinómico [L_1, 2]***, donde L_1 es la lista de puntos antes creada, y 2 es el grado del polinomio al que se desea ajustar dicha lista (Figura 5).

Figura 5



En la imagen se muestra cómo se ingresa en la barra de entrada el ajuste de los puntos a la función polinómica, cómo aparece en la vista algebraica -f(x)- y en la gráfica.

Al observar que el vértice no coincidía con el arco, se probaron distintos ajustes de la lista de puntos con otras funciones. Se visualizó que funciones polinómicas de otros grados modelizaban más certeramente la construcción (Figura 6).

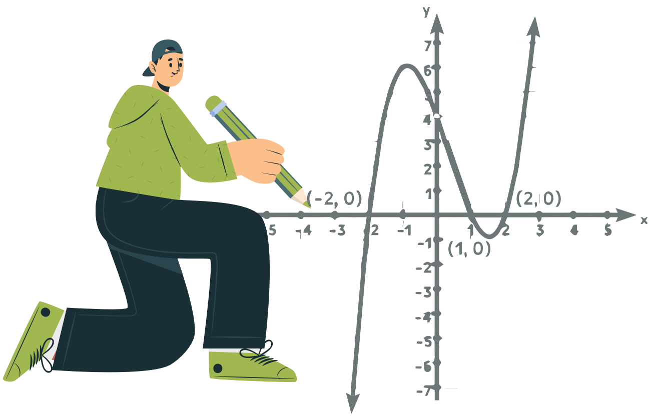
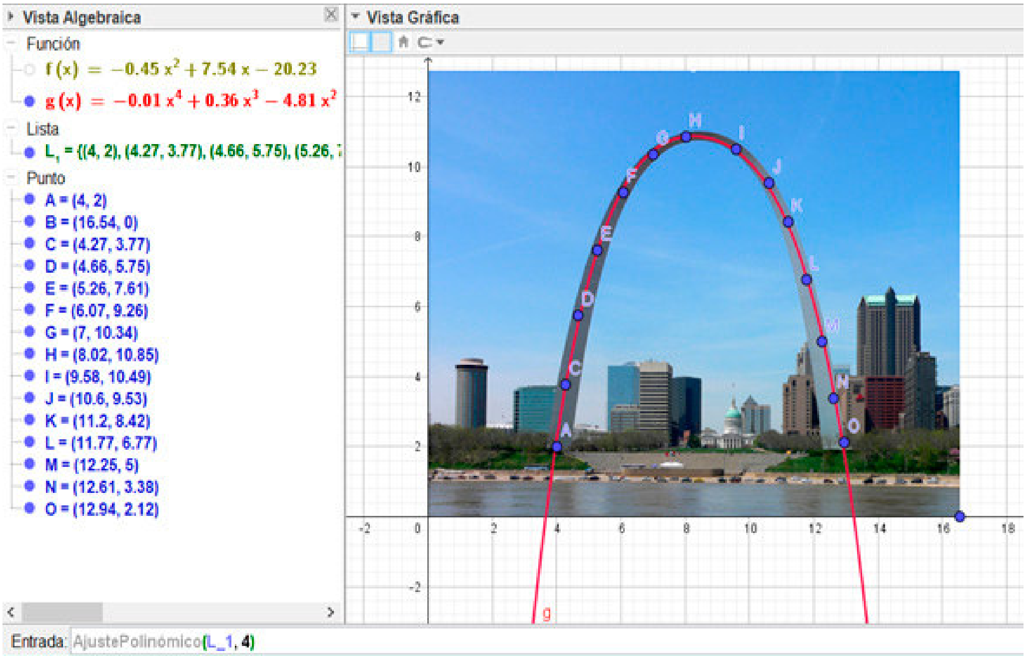


Figura 6



g(x) es la función polinómica de grado 4 que modeliza la curva del Arco. La función cuadrática está oculta en la vista gráfica para permitir una mejor interpretación.

Una cuestión a considerar es que la construcción del arco se corresponde con una curva catenaria y no con una polinómica, información que fue socializada adrede al final del encuentro, por lo que la discusión giró en relación a las características que tiene una función cuadrática, qué elementos son necesarios y cuáles fundamentales, la posibilidad de aproximación que brindan las herramientas del software y todos los conocimientos que se ponen a disposición a partir de la investigación realizada.

El intercambio posterior se dio en torno a la posibilidad de trabajar con funciones polinómicas de mayor grado en las aulas, su fácil representación a través del software y su correspondiente fórmula que puede identificarse en la vista algebraica.

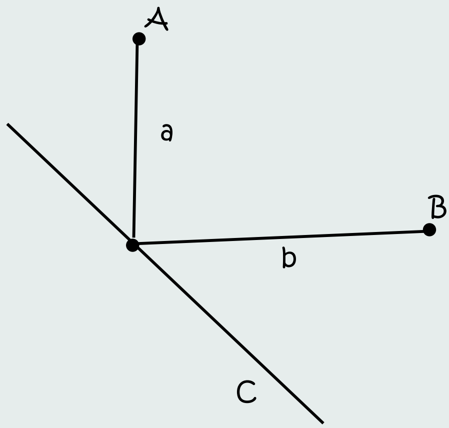
También se intercambió sobre la posibilidad de recuperar las características de la función cuadrática desde otra perspectiva que la tradicional.

La incorporación de imágenes en el programa fue un disparador para pensar distintos tipos de problemas donde incluir el uso de los celulares para que los/as propios/as estudiantes pueda tomar fotografías para luego analizarlas, tanto en relación con la búsqueda de expresiones funcionales que modelicen lo fotografiado, como también en relación con otros contenidos matemáticos. Tal es el caso de las herramientas de movimientos en el plano que ofrece el software, herramientas que permiten por ejemplo analizar las simetrías de las imágenes estudiadas.

Problema 2:

Los enamorados y el caracol

Un isleño que vive en la isla **A** quiere ir a visitar a una isleña que vive en la isla **B**. El isleño enamorado no quiere llegar con las manos vacías por lo tanto decide que antes de llegar pasará a buscar un caracol de la costa **C** la cual se encuentra "repleta" de ellos. Para esto el isleño recorre un tramo **a** y luego otro **b** como indica la figura.



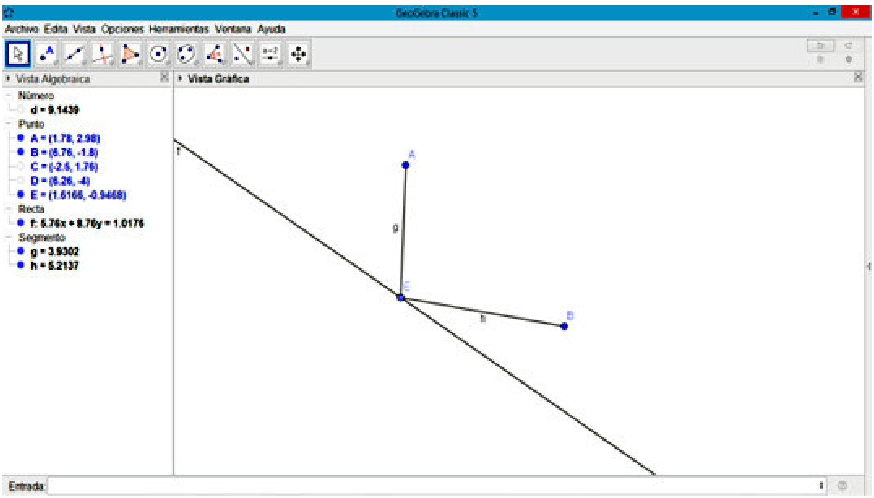
¿A qué punto de la costa debe dirigirse, de modo que el recorrido (a+b) sea el mínimo posible? ¿Cómo podemos representarlo como una función? ¿Qué variables tendrías en cuenta?

Para este problema que admite diversos procedimientos de resolución, el trabajo grupal y la discusión de las múltiples variables puestas en juego resultaron fructíferos en los encuentros realizados. Exponemos aquí algunas resoluciones planteadas en esos encuentros.

Un grupo de profesoras y profesores (Figura 7) comenzó a explorar la situación directamente con GeoGebra de forma geométrica, ingresó dos puntos llamados A y B, una recta que pase por dos puntos C y D, luego un punto E sobre la recta que sería el lugar de la playa donde el enamorado recogería el caracol para su enamorada.

Luego ingresaron dos segmentos, uno de extremos AE y otro de extremos EB. En la vista algebraica se brinda la longitud de cada segmento que el programa llamó “g” y “h” respectivamente. La suma de ambas longitudes sería la longitud de recorrido que debe hacer el enamorado. Para obtenerla ingresaron en la barra de entrada “d=g+h” obteniendo en la vista algebraica la distancia total que debe recorrer.

Figura 7



En la parte superior de la vista algebraica se puede observar la longitud del camino a realizar. Al mover el punto E asociado a ella, se encontrará la posición deseada cuando d sea menor.

Observemos que en este caso se trabaja de forma geométrica en el plano sin sistema de referencia en ejes cartesianos, aunque GeoGebra brinda la información algebraica en la columna de la izquierda con sistema de referencia. Trabajar con la hoja lisa, la cuadrícula y/o los ejes de coordenadas es una elección que te brinda el programa y condicionará o no el trabajo matemático según cada problema en particular.

Lo que hicieron las y los profesores fue ir moviendo el punto E sobre la recta "playa" e ir observando qué sucedía con la longitud "d", encontrando una aproximación de cuál debería ser el punto de la playa conveniente para el enamorado.

Una variante que apareció para la anterior resolución fue registrar la longitud de los segmentos AE=g, EB=h y AE+EB=d en la vista Hoja de Cálculo que brinda el programa (Figura 8). Una vez abierta esta ventana sobre la vista gráfica se debe hacer click derecho en cada uno de los segmentos que queremos registrar su longitud y seleccionar entre las opciones que nos brinda "Registrar en Hoja de Cálculo". Al mover el punto E y estar activado el registro, el propio programa irá completando la hoja de cálculo. Será entonces interesante agregar en la tercera columna la suma de ambos segmentos para luego encontrar el menor valor e identificar cuál es el camino más conveniente.

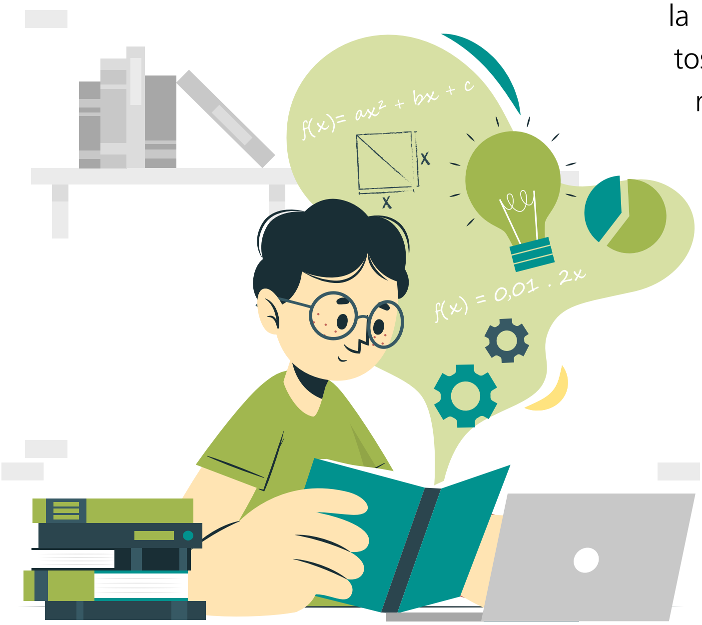
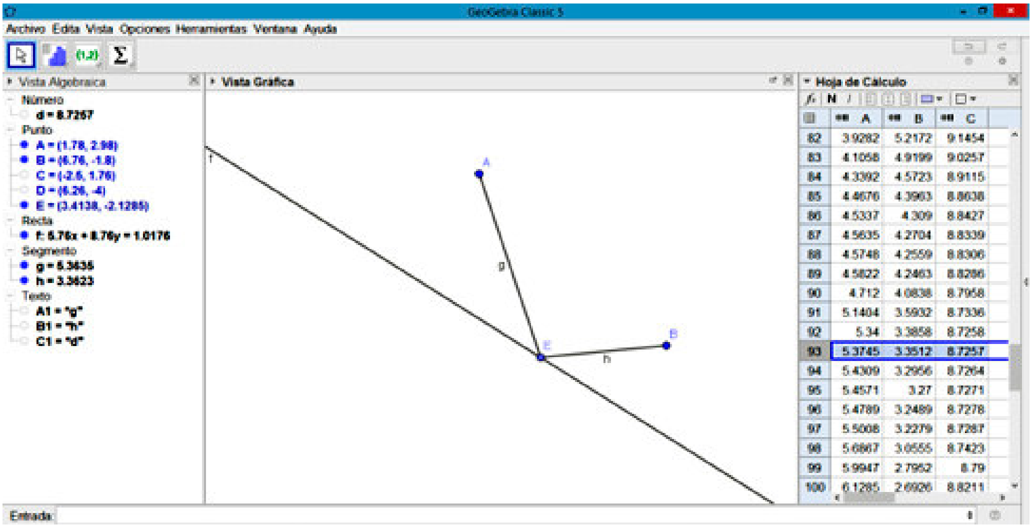


Figura 8

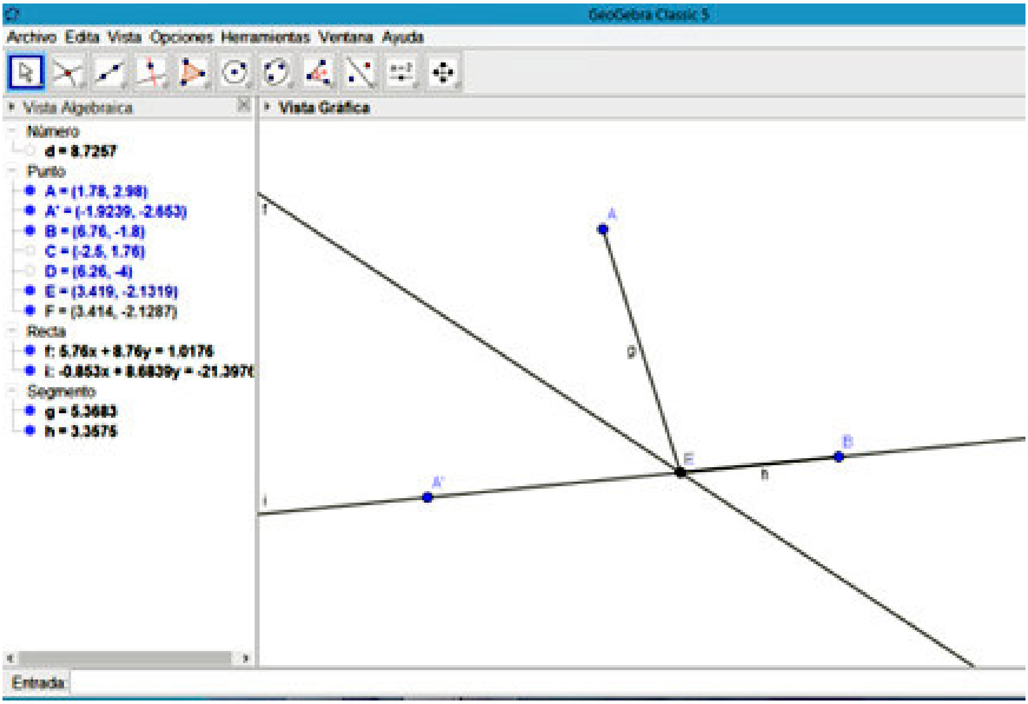


Así se observará el registro en la hoja de cálculo una vez que se mueva el punto E sobre la recta “playa”

De esta forma podemos comparar las distintas longitudes, que aparecen en la Hoja de Cálculo en la columna derecha de la pantalla, para aproximar la posición del punto “E” donde el enamorado realizará el recorrido de mínima longitud.

En otro grupo de trabajo, a partir de la exploración y a través del intercambio, las y los profesoras y profesores (Figura 9) se dieron cuenta que el punto “E” solución se podía obtener mediante una construcción geométrica para cualquier disposición de los puntos A, B y la recta “playa”. Si consideramos el punto simétrico al punto A con respecto a la recta “f” playa utilizando la herramienta simetría axial, que el programa llama A´, y luego se considera la recta que pasa por los puntos A´y B, la intersección entre dicha recta y la recta “f” playa es el punto solución que el programa llama F, es decir, es el punto por donde debería pasar el enamorado para recorrer la mínima distancia. Ya que la mínima distancia entre dos puntos está dada por la recta que pasa por ellos.

Figura 9



Encontrar el punto F solución utilizando la herramienta de simetría axial

Al mover tanto los puntos A y B en el plano como la recta “playa”, el punto F se moverá acorde al resto y seguirá siendo siempre el lugar por donde debe pasar el enamorado a recoger el caracol para recorrer la mínima distancia hacia su enamorada.

Otro grupo de profesores y profesoras decidió comenzar a plantear la resolución del problema utilizando hoja, lápiz y el concepto de distancia entre dos puntos en el plano.

Para ello dibujaron un sistema de referencia con ejes cartesianos donde consideraron la costa como el eje de abscisas en donde estaría el punto "C" que lo determinaron C=(x,0) y dos puntos fijos (pero sin valores a sus coordenadas) $A=(x_1,y_1)$ y $B=(x_2,y_2)$.

La fórmula que plantearon para analizar la situación es la siguiente:

$$d(x) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + {y_1}^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + {y_2}^2}$$

Dicha fórmula determina la distancia total que recorrería el enamorado en función de "x=el lugar de la costa donde el enamorado toma el caracol".

Luego decidieron hallar la derivada de la función "d" para poder encontrar el mínimo absoluto de la misma, pero dicha derivada quedaba muy compleja de analizar, entonces decidieron dejar por un momento esta propuesta e intentaron pensarlo de otra forma.

Hasta aquí las y los docentes de este grupo no utilizaron el programa GeoGebra para modelizar la situación. Los recursos que les permitían el lápiz y papel a través de cálculos algebraicos no les parecían válidos para trabajar con sus estudiantes.

Se concluyó en la puesta en común con las y los profesoras y profesores presentes en el encuentro que resolver este problema sólo con hoja y lápiz es bastante complejo y no permite explorarlo de tal forma que emerjan las relaciones geométricas que existen entre los objetos involucrados. Así mismo, se analizó que la utilización del programa GeoGebra permite explorar el problema de una forma distinta, dinámica, que favorece una exploración donde emergen propiedades y relaciones entre los objetos involucrados. Al mismo tiempo, la utilización del programa permite explorar la validez de afirmaciones o conjeturas que van surgiendo durante la resolución del problema. Para llevarlo al aula con estudiantes de nivel secundario se podría entregar el problema en una fotocopia, o con la disposición de puntos isla y recta playa en el programa de GeoGebra sin sistema de referencia o con sistema de referencia. En cada caso pueden favorecerse distintos tipos de resoluciones: de forma geométrica y/o funcional, solo de forma geométrica o solo de forma funcional respectivamente. Se consideró que es un problema para plantearlo con estudiantes que ya hayan trabajado con el programa GeoGebra en otros contextos. Y por último se concluyó que es un problema que habilita la construcción y la exploración de modelos matemáticos, es decir, habilita hacer matemática en el aula.

b. Cómo podríamos llevar algunos de estos problemas al aula

A continuación les presentaremos algunos problemas a partir del análisis didáctico que pudimos hacer conjuntamente entre docentes de los dos niveles educativos. Entre profesionales de la educación nos debatimos en todos los casos cómo, cuándo, en qué condiciones podríamos llevar estos problemas al aula con nuestras/os estudiantes.

Problema 3

Los parámetros de la función cuadrática

Partiendo de una función cuadrática $f(x)= ax^2 + bx + c$

1. *Graficar $f(x)= x^2$ como función testigo. Luego graficar las funciones:*

a) $f(x)= 2x^2$ *b) $f(x)= 0.5x^2$*

c) $f(x)= -2x^2$ *d) $f(x)= -0.5x^2$*

¿Cómo repercute en la gráfica la positividad o negatividad del parámetro analizado?

¿Qué variación le encontrás a la gráfica a medida que el parámetro "a" aumenta o disminuye?

Problema 3

2. *Una vez apropiado el parámetro "a" y sus variaciones pasamos a analizar cómo repercute en las gráficas las variaciones del parámetro "b"*

Partiendo de una función cuadrática de la forma $f(x)= x^2 + 1$, graficarla como función testigo y fijando los parámetros a y c, graficar las funciones:

a) $f(x)= x^2 + 2x$ b) $f(x)= x^2 + 3x$

c) $f(x)= x^2 - 2x$ d) $f(x)= x^2 - 3x$

¿Cómo repercute en la gráfica la positividad o negatividad del parámetro analizado a medida que este aumenta o disminuye?

3. *Ya vimos cómo se van modificando las gráficas a medida que varían los parámetros a y b. Ahora veremos qué cambios produce a en la parábola la modificación del parámetro "c".*

Partiendo de una función cuadrática de la forma $f(x)= x^2$, graficarla como función testigo y fijando los parámetros a y b, graficar las funciones:

a) $f(x)= x^2 + 2$ b) $f(x)= x^2 + 3$

c) $f(x)= x^2 - 2$ d) $f(x)= x^2 - 3$

¿Cómo repercute en la gráfica la positividad o negatividad del parámetro analizado a medida que este aumenta o disminuye?

Este problema fue trabajado en el primer encuentro con docentes de secundaria durante el segundo año de trabajo. Originalmente pensado para trabajar con alumnas y alumnos de tercer o cuarto año de secundaria, tiene la particularidad de poder ser estudiado con mínimos conocimientos del software. A priori, solo requiere la introducción de fórmulas en GeoGebra. Esto puede realizarse desde la ***Barra de Entrada*** del programa, utilizando una sintaxis análoga a la habitual en lápiz y papel.

El objetivo de este problema es brindar a las y los estudiantes la posibilidad de explorar y visualizar las variaciones de las gráficas de la función cuadrática a medida que se van modificando los parámetros a, b y c. Para ello, se propuso el uso del GeoGebra como herramienta facilitadora de la tarea, ya que gracias a su uso se pueden generar varias gráficas en un mismo sistema de ejes cartesianos agilizando el tiempo que demanda la construcción en lápiz y papel. La idea es que las y los estudiantes descubran y se vayan apropiando de los conocimientos matemáticos mediante la exploración dinámica que el programa le brinda.

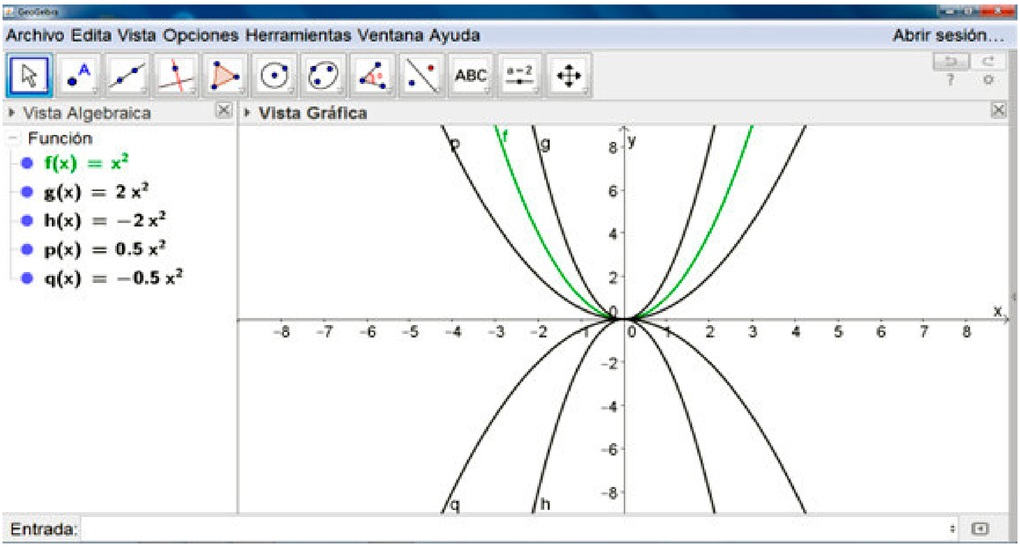
Con la primera parte del problema se espera que logren observar la existencia de dos tipos de variaciones en los gráficos solicitados al compararlo con el gráfico testigo:

- En los gráficos en donde el coeficiente del término cuadrático es mayor a cero la parábola tiene concavidad positiva y en cambio en aquellos donde el coeficiente es menor a cero la concavidad es negativa.
- A medida que el coeficiente del término cuadrático crece, el gráfico de la función se comprime hacia el eje de las ordenadas; en cambio, si el término cuadrático se ve afectado por un coeficiente mayor que cero pero menor que uno lo que sucede es que a medida que este se hace más pequeño el comportamiento de la función se expande hacia el eje de las abscisas.

Mientras las y los estudiantes resuelven, la o el docente podrá monitorear el trabajo de los diferentes grupos. Ante la posibilidad de que algún/a alumno/a o grupo se encuentre obstaculizada, podrá intervenir proponiendo la realización de algún gráfico con un parámetro distinto a los utilizados, ejemplificando la idea que se pretende trabajar y ayudando a las y los estudiantes a llegar a las conclusiones deseadas. También podría entablar un diálogo brindando cierta información, para que la tarea se reanude recurriendo a preguntas orientadoras, a una nueva lectura de la situación, a la evocación de situaciones anteriores que tengan relación con el problema. Resulta interesante agregar en qué momento sería importante hacer una puesta en común para continuar con las y los estudiantes desde la misma base y avanzar con el resto del problema.

En la imagen que se muestra a continuación (Figura 10) se puede observar el gráfico de la función testigo denominada f, junto a los gráficos de las demás funciones solicitadas (g, h, p, q).

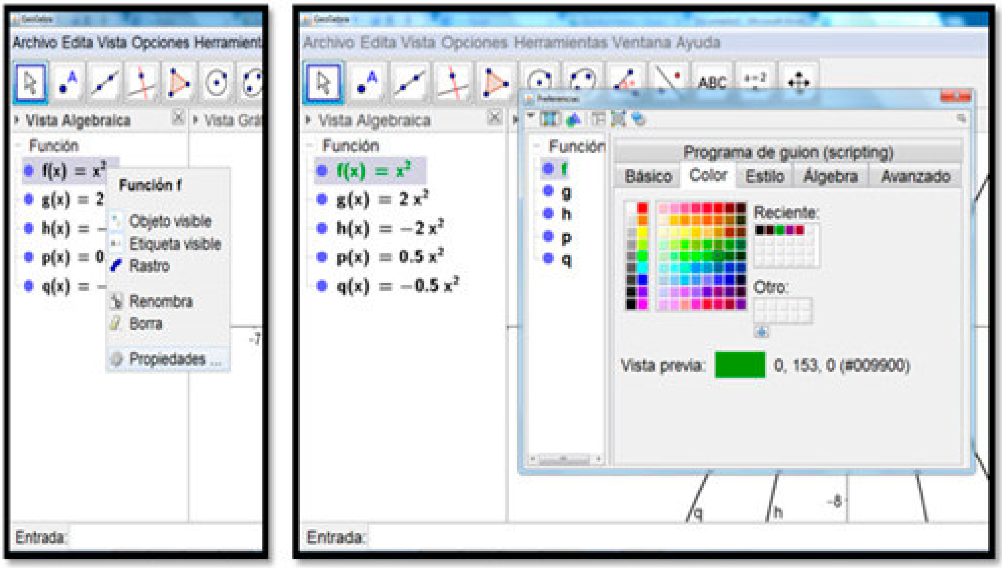
Figura 10



La imagen muestra cómo se vería una posible resolución de la consigna 1 del problema

La decisión de utilizar distintos colores podría ayudar a una mejor visualización de las variaciones que se producen. Una opción para realizar el cambio de color es situar el cursor sobre la fórmula de la función en la ***vista algebraica*** o sobre la curva en la ***vista gráfica*** y hacer click con el botón derecho. Se desplegará una lista de opciones –menú contextual- de la cual se debe seleccionar "*propiedades*". Una vez realizado este paso, aparecerán otras propiedades en una nueva ventana de diálogo emergente, entre las cuales se puede seleccionar el color deseado como se muestra en la siguiente imagen (Figura 11). Es interesante observar que el gráfico en la vista gráfica y su correspondiente fórmula en la vista algebraica llevan el mismo color lo que ayuda a identificarla rápidamente.

Figura 11

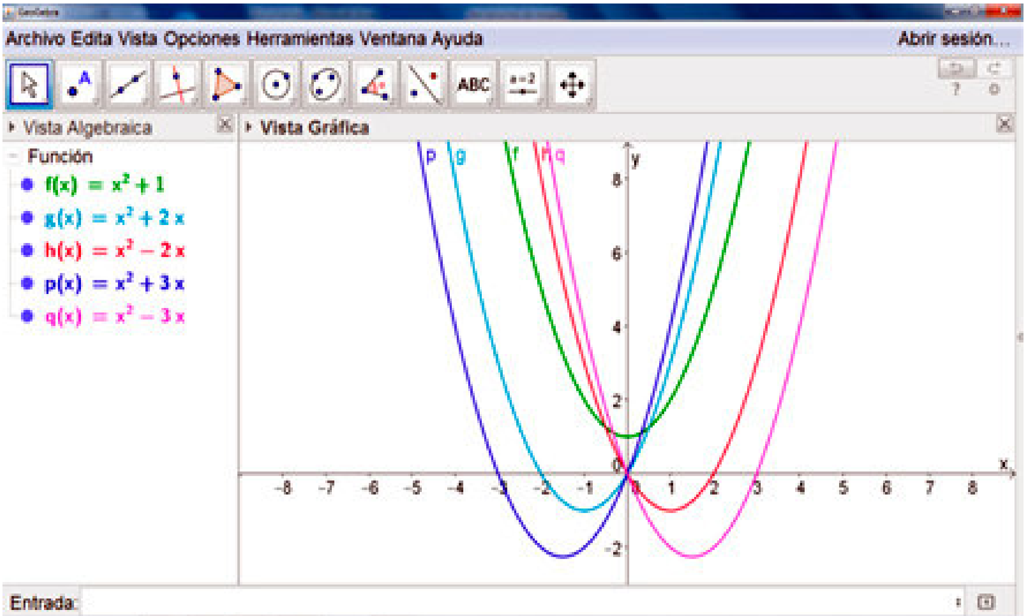


Cómo cambiar el color de un objeto en GeoGebra

Para la segunda parte del problema, se espera que las y los estudiantes observen que, al variar el parámetro b, lo que cambia es la posición del vértice de cada parábola. Las/os estudiantes podrían arribar a las siguientes conjeturas: la posición del vértice de los gráficos, cuando b > 0, se desplazará hacia la izquierda respecto de la función testigo. En cambio, cuando el valor de b < 0, el desplazamiento será hacia la derecha. En ambos casos (y siempre en relación con la función testigo), a medida que el valor absoluto de b aumenta, la ordenada del vértice de la parábola decrece.

Lo anterior permitiría abrir nuevos interrogantes, como por ejemplo ¿cuál es el lugar geométrico descripto por los vértices de esas parábolas obtenidas al variar el coeficiente b? Como sabemos, dicha variación no es lineal (como por ejemplo sí lo es la ocurrida al modificar el parámetro c que veremos a continuación). Por lo tanto, dependerá del año de implementación y de los propósitos didácticos plantear o no este interrogante.

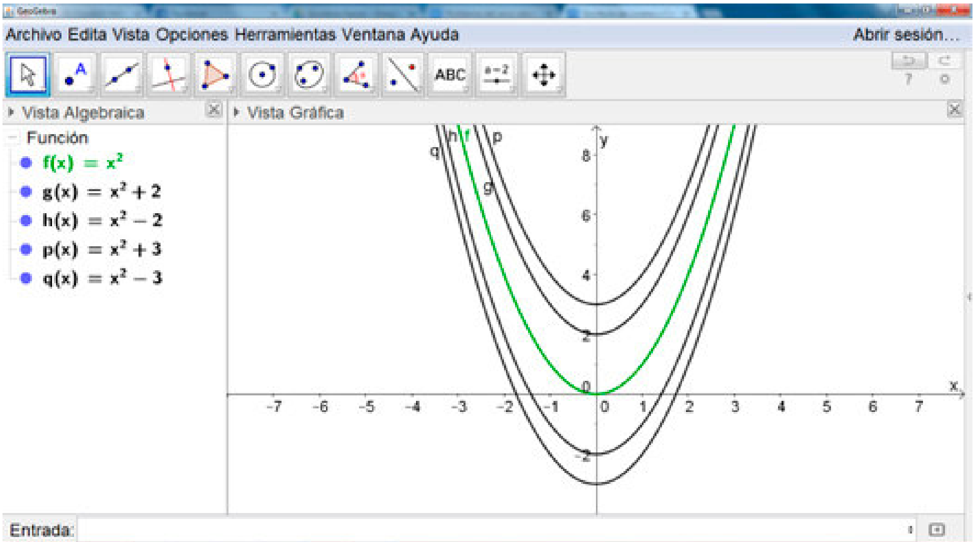
Figura 12



Cómo se vería una posible resolución de la consigna 2 del problema

Finalmente, con la consigna 3 (Figura 13) se espera que adviertan que en el gráfico se observa un desplazamiento vertical de las parábolas, es decir la ordenada del vértice aumenta si $C > 0$ y disminuye si $C < 0$, respecto de la ordenada del vértice de la función testigo.

Figura 13



Cómo se vería una posible resolución de la consigna 3 del problema

Luego de la puesta en común se espera llegar a una conclusión final como la siguiente: *"Los coeficientes b y c trasladan la parábola a izquierda, derecha, arriba o abajo. Si a > 0, las ramas van hacia arriba y si a < 0, hacia abajo. Cuanto más grande sea el valor absoluto de a, más cerrada es la parábola".* La idea es que cada grupo mejore o corrija sus producciones tras la exposición frente a sus compañeras y compañeros, dicha exposición podrán realizarla algunos de los grupos que la o el docente seleccionará según las diversas producciones. En general se torna importante partir de aquellas que no estén acabadas para poder seguir construyendo en conjunto los conocimientos, porque suele suceder que si quienes exponen primero ya tienen la solución final, quienes no arribaron a las mismas pierden la posibilidad de pensarla y anulan lo hecho previamente para tomar lo expuesto como lo único válido.

Un ejemplo de la diversidad de resoluciones posibles, se dio precisamente en los encuentros de articulación. En la puesta en común realizada, un grupo mostró cómo utilizando distintos colores se podían diferenciar mejor las funciones, otro utilizó ***deslizadores*** para cada uno de los parámetros. Un último grupo utilizó deslizadores en los tres parámetros al mismo tiempo, mostrando también el uso del ***rastro***.

La herramienta ***deslizador***, disponible en la *barra de herramientas*, permite establecer un valor numérico variable (en el rango que se desee establecer) que puede modificarse en tiempo real (Figura 14).

Figura 14

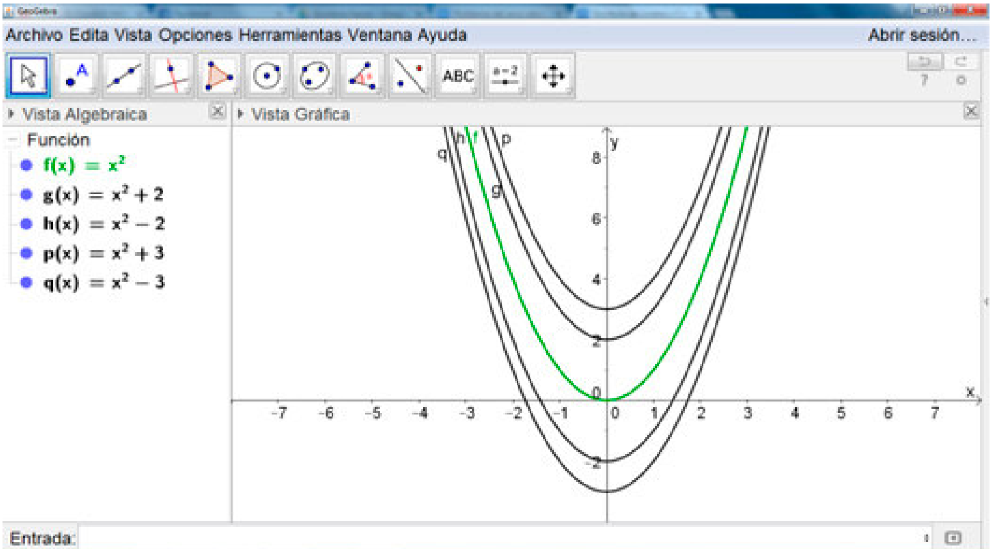


Imagen de la función asociada a un deslizador

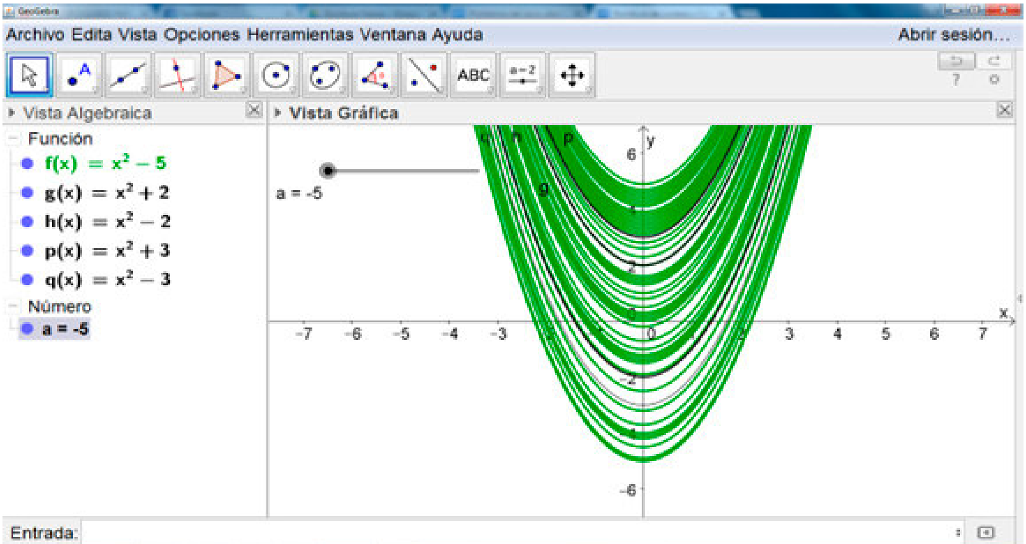
La imagen anterior nos muestra a una función cuadrática donde el coeficiente *a* depende de un deslizador. Podemos observar en la vista algebraica a este último con el nombre *a* y a la función asociada a ella. En la vista gráfica se observa el deslizador al cual se puede ir moviendo y cambiando su valor al mismo tiempo que cambiará la gráfica de la función.

El ***rastro*** es una huella que pueden dejar los distintos objetos geométricos cuando ellos se desplazan por la pantalla. Puede activarse desde el menú contextual de cada objeto.

Así, combinando ambas opciones en este problema (deslizador y rastro), es posible modificar la expresión de la función mediante el primero, obteniendo en tiempo real la huella del desplazamiento de los sucesivos gráficos.

Frente a esto último, discutimos que el uso de estas herramientas en ciertos problemas, puede llegar a dificultar la visualización de los objetos matemáticos en juego, en vez de aportar al aprendizaje. Al activar la opción *dejar rastro* (Figura 15) se ven tantas funciones a la misma vez que podría ser difícil interpretar qué es lo que varía y cómo lo hace.

Figura 15



Se puede observar cómo el rastro puede dificultar la identificación de las distintas funciones a comparar

En cuanto al uso de los deslizadores observamos que no permitiría tener una función de referencia ya que al mover el deslizador se pierde la gráfica original. Una opción es dejar una función fija y construir otra con un deslizador, siendo una variante útil para este problema, ya que de este modo se podrían visualizar las variaciones de una forma más clara.

En resumen, en cuanto al uso de herramientas podemos afirmar que en algunas oportunidades utilizarlas agilizan los tiempos de exploración y en otras podría ser perjudicial para el objetivo de la actividad.

Problema 4

Bacterias

Para el desarrollo de una nueva fórmula un laboratorio está estudiando un nuevo cultivo. Han determinado que las bacterias que se utilizarán se reproducen triplicando su cantidad cada hora. Se inicia un campo de cultivo con veinte bacterias a las 8:00 horas.

a) ¿Cuántas bacterias habrá luego de una hora? ¿de 4? ¿y de 10?

b) ¿Cuántas bacterias habrá a las 13:45 h?

c) Encontrá un modelo matemático que se adecue al crecimiento de esta colonia de bacterias. Luego graficá la función encontrada en el Geogebra.

d) Todos los datos obtenidos anteriormente, ¿coinciden con la gráfica? ¿a qué crees que se debe esto?

La riqueza que brinda este problema reside en que los distintos ítems habilitan diversas resoluciones, ya sean válidas o no. Las mismas favorecen la aparición de diferentes posturas que permiten plantear discusiones matemáticas entre estudiantes en una posible puesta en común y/o entre pares durante la resolución en pequeños grupos.

Por otro lado la situación planteada les permite a las y los estudiantes comenzar a dar respuesta a los distintos ítems, mediante distintas resoluciones, sin ninguna instrucción previa por parte de la o el docente, es decir que es un problema que pueden resolver a partir sus conocimientos previos.

En el ítem a) se espera que las y los estudiantes pongan en juego las operaciones matemáticas involucradas para dar respuesta al problema y vayan analizando el comportamiento de la situación. Es por eso que se solicita cantidad de cultivo de bacteria para horas enteras transcurridas.

Para la primera hora: 20x3=60. Obteniendo 60 bacterias al transcurrir una hora.

Para 4 y 10 horas transcurridas es posible que las y los estudiantes calculen la cantidad de bacterias hora a hora hasta llegar a la cantidad de bacterias en las horas solicitadas. Puede ser que lo hagan directamente con la calculadora sin dejar registro de resultados intermedios, en tal caso la o el docente podría sugerirles que anoten la cantidad de bacterias que van calculando aunque no lo solicite el problema, como así también dejen registrado en la carpeta los cálculos que van realizando paso a paso.

Para la resolución del ítem b) en donde se solicita la cantidad de cultivo de bacteria para una cantidad no entera de horas transcurridas, (13:45 h) es decir 5 horas 45 minutos transcurridos, o 5 horas y tres cuartos, o 5,75 horas transcurridas, las y los estudiantes pueden encontrar ciertas dificultades. En particular, si para hallar lo solicitado se basan en las misma estrategias utilizadas para el cálculo de valores enteros.

Algunas resoluciones esperables en este caso, no necesariamente correctas y en general basadas en procedimientos proporcionales, son:

I) Apoyándose en la cantidad de bacterias de 5 h (4860 bacterias) y 6 h (14580 bacterias) transcurridas, tomar la diferencia entre 4860 y 14580 (14580-4860=9720), a dicha diferencia calcular las tres cuarta parte y sumarla a 4860 (9720x3/4 +4860= 12150). En este caso a las 5:45 h transcurridas habría 12150 bacterias.

II) Dividiendo por 60 (minutos en una hora) la diferencia de cantidad de bacterias entre 5 h y 6 h transcurridas, para hallar la cantidad de bacterias en 45 minutos:

Diferencia de cantidad de bacterias dividido 60 (9720/60=162) entonces en 45 minutos (162 x 45=7290) más la cantidad de bacterias a las 5 h transcurridas (7290+4860= 12150).

En este caso a las 5:45 h transcurridas habría 12150 bacterias.

III) Regla de tres simple:

5 h ________________ 4860 bacterias
5,75 h _____________ x= 5,75x4860/5= 5589 bacterias

IV) Otro caso de regla de tres:

6 h ________________ 14580 bacterias
5,75 h _____________ x= 5,75x14580/6=13975,5 bacterias

En estos casos, sería interesante que la o el docente no exponga el error en las resoluciones, para brindar la posibilidad de que sean las y los estudiantes quienes luego puedan constatar estos resultados con los obtenidos en las siguientes instancias de resolución del problema.

En el ítem c) se solicita a las y los estudiantes que encuentren un modelo matemático, es decir una expresión o fórmula, que permita calcular la cantidad de bacterias en función de las horas transcurridas. Es posible que propongan la siguiente fórmula apoyados en las resoluciones de los anteriores ítems:

Cantidad de bacterias en una cierta hora = (cantidad de bacterias en una hora anterior) x 3

Para verificar si es válida esta fórmula la o el docente puede proponer una puesta común en donde se discutan las formas de resolución del ítem a) y que plantee ordenar en una tabla los datos que las y los estudiantes vayan arrojando.

Una vez que se compruebe la validez de la fórmula planteada anteriormente sería interesante poner en discusión las limitaciones que tiene. La o el docente podría preguntar por ejemplo, en el caso de que se quiera calcular la cantidad de bacterias para 100 h transcurridas, debería tener información de la cantidad de bacterias transcurridas las 99 h y para 99 h, ¿qué cuentas debería hacer?

Tras las posibles respuestas brindadas a las anteriores preguntas se podría arribar a algunas conclusiones como las siguientes: la cantidad de veces que multiplicamos por tres desde la cantidad inicial coincide con las horas transcurridas y que multiplicar por tres reiteradas veces es una potencia de base tres. Para llegar a estas conclusiones la o el docente podría preguntar: ¿Cuántas veces multiplicaron por tres desde la cantidad inicial para obtener la cantidad de bacterias a las 4 h transcurridas?, ¿y a las 10 h?, ¿con qué otra operación podríamos resumir la multiplicación reiterada del tres?

Una sugerencia es escribir lo discutido en la tabla anterior donde se puede ir agregando una columna con los cálculos que ayudaron a resolver, por ejemplo:

Horas transcurridas	Cálculos que ayudan a resolver	Cantidad de bacterias
0		20
1	20x3	60
2	60x3 = 20x3x3	180
3	20x3x3x3 = $20x3^3$	540
4	20x3x3x3x3=$20x3^4$	1620
5	$20x3^5$	4860
6	$20x3^6$	14580
7	$20x3^7$	43740
8	$20x3^8$	131220
9	$20x3^9$	393660
10	$20x3^{10}$	1180980

Luego la o el docente puede devolver a las y los estudiantes nuevamente la consigna de proponer una fórmula para calcular la cantidad de bacterias en función de las horas transcurridas para arribar a la siguiente fórmula:

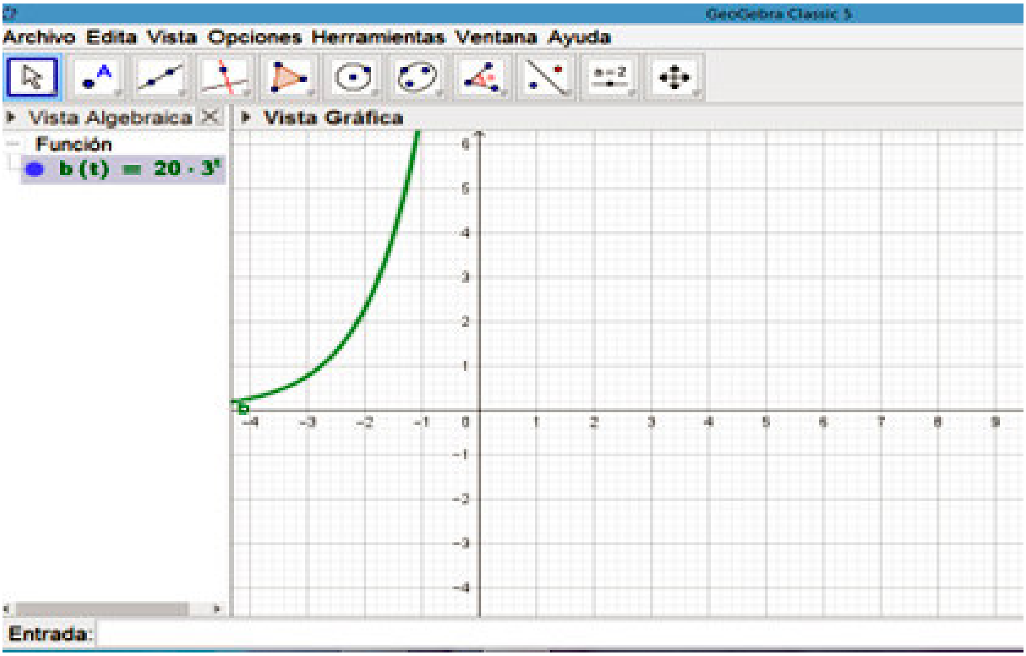
$B(t)=20x3^t$, siendo B la cantidad de bacterias y t el tiempo transcurrido.

Una vez consensuada la fórmula se les propone utilizar el GeoGebra para analizar la gráfica que arroja y pensar el ítem d).

Para introducir una función en GeoGebra, hay versiones en las cuales el software solo reconoce a las funciones con nombre "f" y a la variable independiente como "x". En tal caso se puede introducir en la barra de entrada $f(x)=20*3^x$, de acuerdo a la sintaxis del software. Hay otras versiones de GeoGebra que reconocen funciones con otros nombres para las variables. En tal caso se podría ingresar en la barra de entrada $b(t)=20*3^t$. Es importante que tanto las y los docentes como las y los estudiantes sepan de la existencia de distintas versiones del software para poder llevar adecuadamente el trabajo colaborativo del grupo.

Lo primero que se ve en la pantalla de GeoGebra al ingresar la función es lo siguiente:

Figura 16



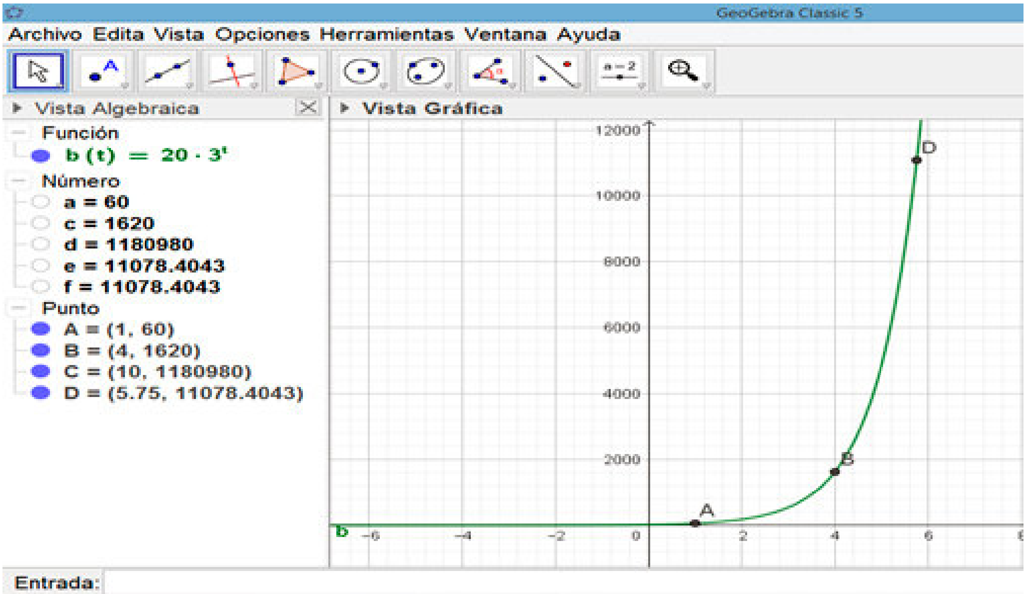
Vista gráfica de la función que modeliza el problema

Para poder analizar el ítem a) la o el docente puede proponer encontrar en la gráfica los datos hallados para t=4 y para t=10. En este caso las y los estudiantes se encontrarán con la necesidad de correr y/o modificar el zoom de la gráfica o la escala de los ejes.

Para poder cambiar la escala se puede utilizar el comando escala “Eje x:Eje y” que se puede seleccionar haciendo click derecho y buscando la opción deseada.

Para corroborar los puntos obtenidos en los ítems anteriores se puede ingresar los puntos encontrados en la gráfica a través de la barra de entrada y observar si pertenecen a la función. Otra forma de ingresarlos es la siguiente: A=(1,b(1)), B=(4,b(4)), C=(10,b(10)), D=(5,75,b(5,75)), respetando la sintaxis para que el GeoGebra pueda entenderlo según convención de programación. De este modo, se tendrá que verificar a través de la expresión de los puntos en la ventana algebraica si la función para cada uno de los valores de la variable independiente coincide con los calculados anteriormente (Figura 17).

Figura 17



Se observan los puntos que pertenecen a las curva, encontrados antes analíticamente

Otra opción similar es introducir los puntos encontrados en los ítems anteriores y mirar si pertenecen o no a la curva.

En esta instancia se podría discutir con las y los estudiantes sobre el crecimiento rápido de la función a medida que pasa el tiempo, qué pasaría si uno se propone hacer con lápiz y papel el gráfico de la función teniendo en cuenta los datos obtenidos, si es o no una gráfica lineal, corroborar los datos obtenidos en los anteriores ítems mirando la gráfica y evaluando la función con GeoGebra.

Es interesante que las y los estudiantes pueden contrastar los resultados obtenidos con lo que arroja el programa para las 5,75 hs transcurridas y devolverles por qué no coincide con las cantidades obtenidas, discutiendo también previamente la necesidad de pasar las horas de sexagesimal a decimal para que el programa lo pueda entender, ¿Qué cuentas realizaron?; entonces ¿al hacer dichas operaciones estaríamos pensando que el crecimiento del cultivo de bacterias es "parejo" o siempre "igual" minuto a minuto o "igual" cada 15 minutos? Si la situación tiene un crecimiento parejo o igual, entonces, ¿cómo sería la gráfica?

El objetivo es que las y los estudiantes puedan identificar que la situación no tiene un crecimiento lineal, sino que es cada vez mayor y que en este caso se lo llama crecimiento exponencial. También sería necesario asociarlo al tipo de fórmula que la modeliza.

Finalmente podemos concluir que algunas de las razones por la cual este problema es interesante para trabajar con estudiantes son que les posibilita la resolución de forma autónoma o con pequeñas intervenciones de la o del docente; habilita recuperar estrategias de resolución para otras situaciones y el análisis de la potencialidad o limitaciones de dichas estrategias para nuevas situaciones; permite relacionar a una función en diferentes expresiones; favorece la contrastación de datos obtenidos analíticamente con los brindados por GeoGebra; habilita la discusión entre pares en pequeños grupos y/o puesta en común e introduce a la construcción de conceptos relacionados con modelos exponenciales.

Problema 5

Intercambios, ¿favorables?

El señor A le propone al señor B la siguiente transacción:

A le dará a B $1 el primer día del mes y cada día le dará $1 más que el anterior.

B le dará a A $ 0,01 el primer día del mes y cada día le dará el doble de lo que le dio el día anterior.

a. ¿A cuál de los dos te parece que le conviene este trato? ¿Siempre? ¿Por qué?

b. Completá el siguiente cuadro:

Día	Recibe A ($)	Recibe B ($)
1	0,01 1	
2	0,02 2	
3	0,04 3	
4	0,08 4	
5		
6		
7		
8		
9		
x		

c. A partir de una cantidad de días cambia el beneficiado, ¿cuándo creés que es? ¿Cómo podés darte cuenta?

d. Graficá ambas funciones en enGeoGebra y volvé a responder las consignas anteriores.

e. Analizá para quién es conveniente este trato y en qué condiciones de tiempo.

Hemos elegido trabajar con este problema porque aparece en el Diseño Curricular para la Educación Secundaria de quinto año de Matemática Ciclo Superior del año 2011, y también porque puede ser utilizado para confrontar las diferencias entre una situación que varía en forma lineal respecto de otra que cambia exponencialmente. Nos resultó interesante analizar qué cambios aparecen y qué aporta el tratamiento con el software en función de la resolución que se hace habitualmente con lápiz y papel.

Notamos al poner en circulación este problema, que en la primera consigna se incorpora un desafío particular al ejercicio: es muy probable (hay que estar atentas/os) que las primeras respuestas que arriesguen surjan desde el "sentido común": que crean que conviene la que parte de 1$ (lineal) y no la de los centavitos. O sea, pensar que una variación uniforme con una buena cantidad es mejor que arrancar con muy poco aunque con una variación que se incrementa exponencialmente. Luego se buscará aprovechar el carácter contraintuitivo de la matemática, quebrando la lógica de respuesta fácil desde el sentido común y mostrando el crecimiento veloz en los modelos exponenciales.

Con este modo de trabajo las y los docentes irían desarrollando la capacidad de abrir enigmas (o problemas) que interroguen los saberes de las y los estudiantes, que, por una parte, las o los desafíen y que, por otra, les abra el camino para avanzar en su resolución.

La resolución de la consigna b) apunta a completar una tabla de valores, mediante la resolución de cálculos sencillos, hasta llegar al último renglón donde se busca que a partir de lo registrado encuentren alguna posible regularidad.

En el caso del señor A que siempre le da a B la misma cantidad puede calcularse a través de la fórmula $f(x)= x$, siendo x los días transcurridos desde el primer día del mes.

En cambio, para calcular el dinero que le dará el señor B a A, puede que les resulte más complejo encontrar la regularidad, por lo que una intervención docente posible podría ser que escriban los cálculos que realizaron para encontrar esos resultados. Al observar que siempre se multiplica por dos y que la cantidad de veces que se hace al doble coincide con la cantidad de días transcurridos, se espera que puedan llegar a la siguiente expresión: $f(x) = 0{,}01 \cdot 2^x$

Luego, para resolver la pregunta c), es necesario que todas y todos puedan contar con la fórmula (a las y los que no llegaron habrá que ayudarlos/as, situación que al trabajar en equipos seguramente no será necesaria). Puede que este sea un buen momento para poner en común las conclusiones con las que cuentan y de este modo garantizar que todas y todos sigan trabajando el problema con las fórmulas correctas que describen cada una de las situaciones planteadas.

A partir de las fórmulas obtenidas, encontrar el momento justo de cuándo conviene un ahorrista con respecto al otro analíticamente nos implicaría resolver un sistema de ecuaciones con una ecuación lineal y otra exponencial. Esto no es común en este nivel educativo y no creemos que los estudiantes cuenten con las herramientas para resolverlo. Así mismo, a través de la gráfica de la situación podrán encontrar el punto de equilibrio, pero al realizarla con lápiz y papel será complicado trazar adecuadamente la función exponencial. Es por ello que creemos que la respuesta a esta consigna será aproximada. También en la tabla de valores que completaron verán que está entre el día 9 y 10.

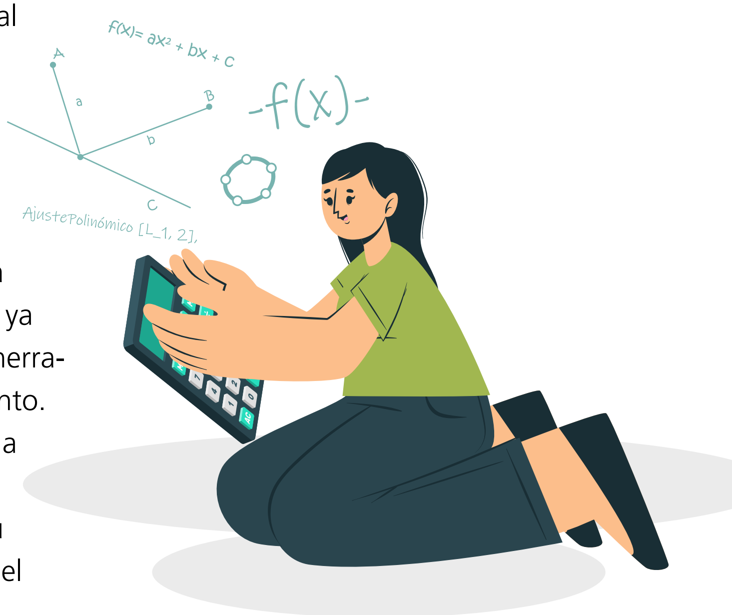
Notemos que hasta acá no hemos incentivado el uso de Geogebra a través de las consignas, aunque podríamos haber cargado los valores para obtener la gráfica y la fórmula. Si alguno lo hace por motu propio será valorado y se acompañará este avance, aprovechando para identificar las características y estilos propios que se despliegan al abordar un problema matemático.

Llegados a este punto, en la pregunta d) y en la e) se invita a trabajar con el programa. La propuesta planteada es la de graficar estas funciones utilizando el GeoGebra para visualizar el punto de equilibrio y contrastar luego con los resultados analíticos, esta actividad tiene como objeto favorecer el "viaje" de ida y vuelta desde lo empírico a lo teórico.

El software no está utilizándose en este caso como un apoyo en la exploración sino como instrumento de corroboración, de confrontación y de comprobación.

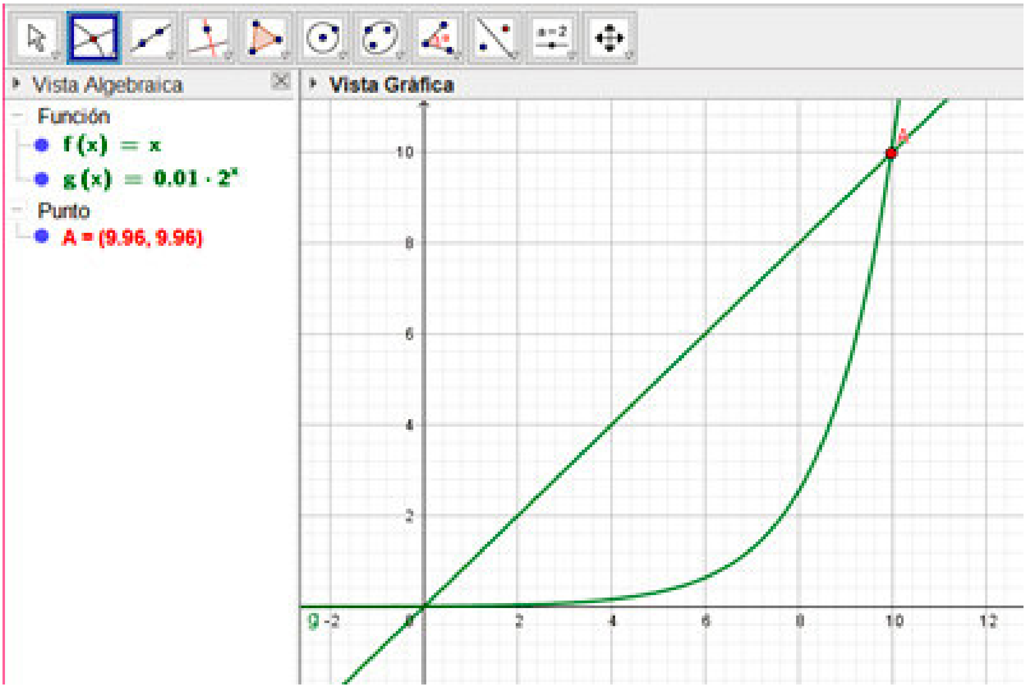
Mientras que en la primera consigna se busca que las y los estudiantes anticipen una respuesta desde sus percepciones sin calcular y en la segunda que encuentren valores analíticamente, en estas últimas se invita a trabajar con el GeoGebra buscando corroborar lo hecho anteriormente. Graficando con el software, el programa facilita una devolución rápida de la situación que permite a cada estudiante confrontar sus hipótesis. Esta devolución "de la pantalla" genera que ellas mismas y ellos mismos puedan repreguntarse, que se autoevalúen, que modifiquen sus respuestas, etc. Con esto se estaría alentando a las y los estudiantes a que valoren sus producciones matemáticas; realicen consultas; defiendan posturas y construyan hipótesis explicando desde las construcciones matemáticas personales o de sus pares.

Como comentamos anteriormente, sabemos que no es usual resolver, en las clases de matemática de la escuela secundaria, sistemas de ecuaciones con exponenciales a través del uso de lápiz y papel. Sin embargo, utilizando GeoGebra estas posibilidades se amplían, ya que el programa tiene distintas herramientas para encontrar ese punto. Por ejemplo se puede solicitar a través de la herramienta intersección que aparece en el menú de punto, que nos mostrará el



punto de intersección entre los dos objetos que estamos trabajando (las dos gráficas de las funciones). De esta manera podremos verlo gráficamente (Figura 18) y en la ventana algebraica obtener la solución de este sistema de ecuaciones.

Figura 18



En la vista gráfica se observa el punto de intersección de las dos curvas y en la vista algebraica su correspondiente solución analítica.

También se puede encontrar el punto de equilibrio visualmente sin solicitarlo al programa. Lo importante es que todas y todos las y los estudiantes puedan identificar que en ese punto estarían al mismo tiempo dándose la misma cantidad de dinero ambos señores y que a partir de ese instante cambia quién se beneficia con la situación.

c. Desde el aula de secundaria

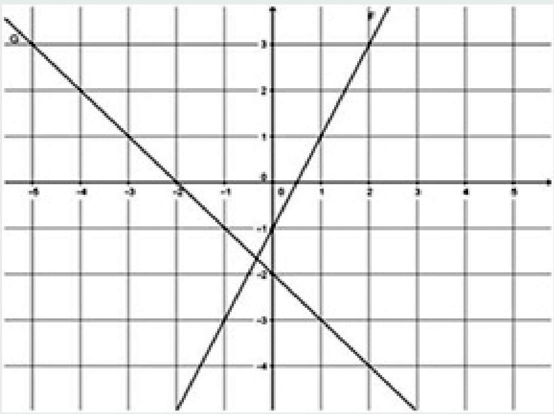
Hasta ahora les compartimos algunos problemas de los que trabajamos en los encuentros y les socializamos las diversas formas de resolución que aparecieron en el intercambio entre pares, junto con la explicación del uso de algunas herramientas del software y reflexiones sobre la enseñanza y aprendizaje con su uso.

A continuación les brindaremos a modo de ejemplo el análisis de una clase planificada a partir de uno de los encuentros que se desarrolló en un aula de secundaria. Nos parece muy enriquecedor observar qué es lo que sucede en las aulas con las y los estudiantes de la escuela y vislumbrar el potencial que tiene esta herramienta tanto para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, como para repensar nuestro rol docente.

Problema 6

La función lineal como punto de partida

1. a) A partir de estas funciones completá la tabla de la función H(x) siendo esta el producto de F(x) por G(x)



x	H(x)
1	
0	
-1	
-2	
-3	

b) Indicá qué signo tendrá cada una de las imágenes de estos valores de x
X = 10
X = -6
X = -0,84
X =3,25

c) Trazá un gráfico aproximado sobre el gráfico dado.

d) Ingresá las funciones F y G en Geogebra ¿Cómo construirías H(x)?

Si lo comparás con el gráfico que realizaste ¿son similares? ¿Alcanzaron los puntos encontrados para que sea similar al gráfico trazado con GeoGebra?

2. Si queremos obtener una parábola con concavidad positiva ¿Qué características deben tener las rectas? Da ejemplos. ¿Y con concavidad negativa? Da ejemplos.

3. a) ¿Cómo se puede encontrar el eje de simetría y el vértice?

b) ¿Cómo deben ser las rectas para que el vértice esté ubicado en el primer cuadrante? ¿Y en el segundo? ¿Y en el tercero?

c) ¿Cómo deben ser las rectas para que la parábola tenga máximo en el primer cuadrante? ¿Cómo deben ser las rectas para que la parábola tenga mínimo en el cuarto cuadrante?

4. ¿Cómo deben ser las rectas para que la función H(x) tenga dos raíces distintas? ¿Y para que tenga una raíz doble? ¿Y para que no tenga raíces?

Una característica de este problema es que, de acuerdo a los propósitos didácticos que se planteen, puede ser trabajado en diversos años de la educación secundaria. En general, puede ser utilizado tanto para la introducción del concepto particular de función cuadrática como utilizarse en años posteriores para una introducción al trabajo con diversas funciones polinómicas.

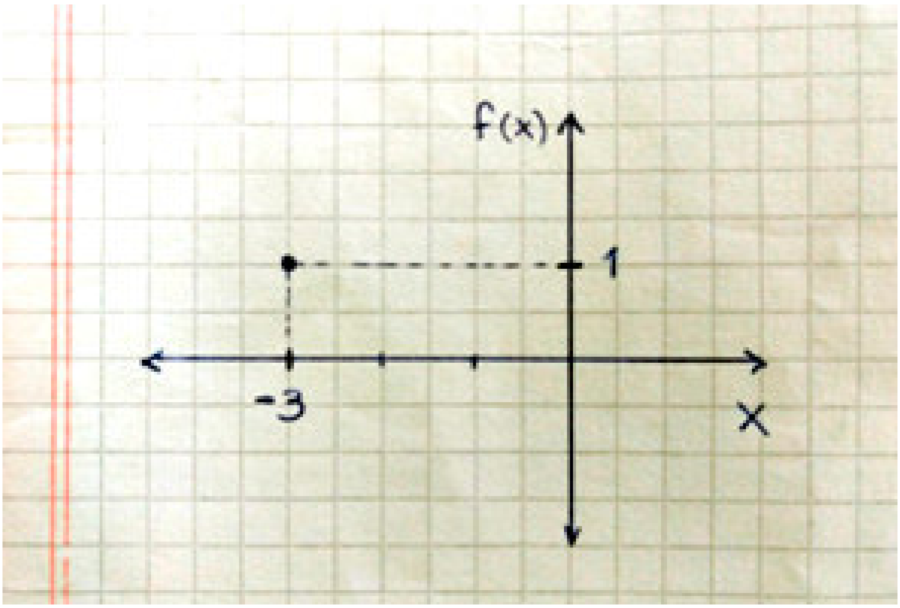
A su vez, este problema, que originalmente fue trabajado en los encuentros de articulación, fue posteriormente puesto en obra en una escuela secundaria por una docente participante de estos encuentros. El registro de esa implementación fue compartido en los encuentros siguientes, sirviendo como insumo para profundizar los análisis realizados. Compartimos aquí algunos datos de esta experiencia, incluyendo algunas de las orientaciones realizadas en la clase. Por supuesto son sólo algunos ejemplos que cada docente podrá adaptar y/o modificar, según su propia forma de trabajo y las características de cada grupo.

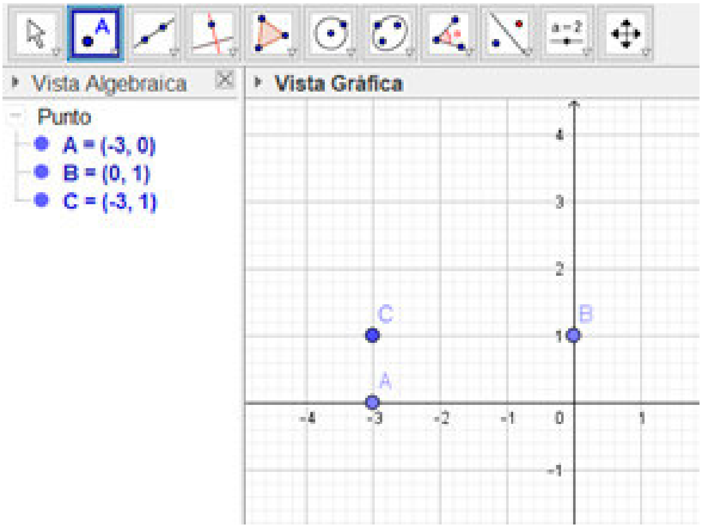
El problema fue presentado a estudiantes de cuarto año de una escuela de gestión estatal de Florencio Varela. Se repartió una fotocopia para cada grupo con la imagen como se puede ver más arriba, decisión orientada a agilizar el análisis visual de las rectas dadas. La clase se desarrolló en el laboratorio de informática, la que posee 20 computadoras de escritorio con el programa GeoGebra en sus diferentes versiones: 5.0; 4.4; 4.2; 4.0 ; 3.0. Cada grupo de trabajo estuvo integrado con no más de 3 estudiantes.

El ítem a) de la consigna 1, orientado al reconocimiento de la función lineal y al arribo de la función cuadrática mediante el producto de funciones lineales, puede ser resuelto tanto con lápiz y papel como con la computadora. Cualquier camino elegido por las y los estudiantes puede ser eficiente, por lo tanto durante la clase que exponemos como ejemplo se aceptó el trabajo inicial de cada grupo. En función de lo trabajado, la o el docente las y los fue guiando según la opción escogida.

Sólo dos grupos decidieron hacerlo directamente con el programa GeoGebra y la primera dificultad fue indicar un punto en el plano de ejes cartesianos. El punto (-3; 1) quedó marcado en la pantalla a través de tres puntos distintos: el (-3; 0), el (0; 1) y el (-3; 1). Tal vez por la forma que desde el pizarrón o en la hoja, con el dedo o el lápiz marcamos el -3 en la abscisa y el 1 en la ordenada, para finalmente marcar el punto deseado; fue llamativo que las y los estudiantes de los distintos grupos marcaron en el programa los tres puntos indicados y afirmaba que estaban marcando solamente uno, el solicitado (Figura 19).

Figura 19



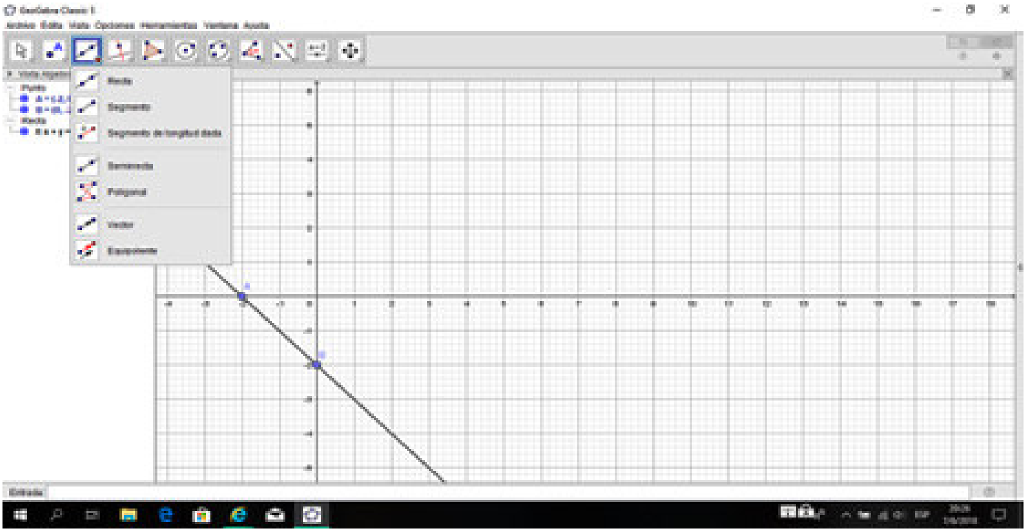


Algunas de nuestras prácticas docentes pueden malinterpretarse y utilizando el programa quedan en evidencia, ya que muchos/as estudiantes estaban convencidos que sólo introducían un punto en la gráfica.

Este fue un hecho llamativo, el cual no pudimos anticipar al pensar y planificar la clase. Ante esta situación la intervención docente fue la de explicar en cada grupo que las coordenadas del punto no se desglosan y que había dos puntos que no pertenecían a lo pedido. Para reforzar su explicación ayudó a que las y los estudiantes alumnos/as vieran en la *Vista Algebraica* del programa que en vez de aparecer únicamente el punto buscado, aparecían 3. Así, la información devuelta por el software convenció a las y los estudiantes permitiéndoles identificar la diferencia entre lo solicitado y lo producido.

Otra dificultad a la que se enfrentaron, tanto los grupos que trabajaron en lápiz y papel como los que utilizaron el software, fue la identificación de la ecuación de la recta a partir de su gráfico. Quienes utilizaban el GeoGebra pudieron resolverla trabajando en forma geométrica, marcando dos puntos (el punto A y el punto B) para luego buscar con la herramienta ***recta*** que pasa por dos puntos, la gráfica deseada. Luego, en la ventana algebraica pudieron hallar la ecuación de la recta asociada (Figura 20).

Figura 20



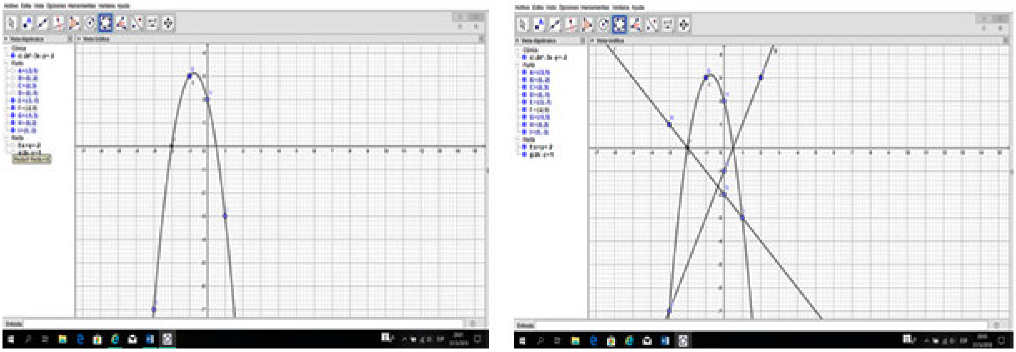
Observamos dónde encontrar la herramienta ***recta***

Para el ítem b) las y los estudiantes tuvieron que sortear ciertas dificultades: una vez que lograron representar las rectas, notaron que en la vista algebraica aparecen sus ecuaciones distintas a lo que están acostumbrados. La función f : x + y = -2 tuvieron que plantearla como y = -2 – x para reconocerla, y lo mismo para g : -2 x + y = -1, pensada como y = -1 + 2x. Entonces pudieron hallar en lápiz y papel a H (x) como (.2 – x) . (-1 + 2x) y, a partir de este producto, completar la tabla. Al plantear H(x) como producto de las funciones lineales, algunos grupos en sus carpetas, a través de cálculos algebraicos, hallaron que H(x) resultaba una función cuadrática.

En el ítem c) se plantea construir el gráfico aproximado sobre el gráfico dado. Si la opción fue trabajar con lápiz y papel, la representación gráfica resultó dificultosa. Así mismo, los grupos que trabajaron con GeoGebra, aunque pudieron introducir los puntos fácilmente, tampoco reconocieron la obtención de una parábola, a pesar de haber hallado H(x) analíticamente. Luego de varios intentos, un grupo halló la curva a partir de la herramienta ***cónica que pasa por cinco puntos***.

Una vez construida la parábola, en varios grupos se sugirió ocultar objetos pues la vista gráfica de las rectas, con los puntos de la tabla de valores, impedía reconocer y diferenciar los puntos nuevos que se marcaban. Esto puede hacerse fácilmente desde la vista algebraica presionando el círculo que tiene cada objeto a su izquierda. Cuando ese circulito se despinta, en la vista gráfica se ocultará su representación gráfica. Es interesante observar, que si bien puede no verse, el programa sigue registrando su existencia y no se modifican las dependencias de otros objetos que tenga asociada. Por lo tanto podemos concluir que ocultar un objeto no es lo mismo que borrarlo (Figura 21).

Figura 21



A la izquierda observamos el gráfico ocultando objetos y a la derecha con las rectas y la función cuadrática construida a partir de la cónica que pasa por 5 puntos.

Continuando con el análisis de la clase, por más que "despejaran la gráfica", en algunos grupos la parábola no se identificó inmediatamente. En ese punto, las y los estudiantes que ya la habían graficado pasaron por las computadoras de sus compañeros para ayudarlos.

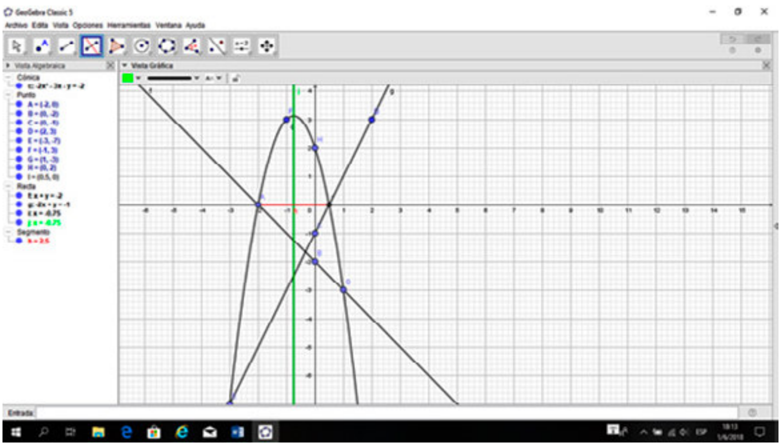
Vale aclarar que en este momento de trabajo quienes lo hacían con carpeta y GeoGebra se inclinaron más a la pantalla de la computadora, quedando la primera opción desplazada a un segundo lugar, solo para hacer cálculos. Muchos alumnos se sorprendieron al ver en *Vista Algebraica* la función cuadrática que habían hallado anteriormente de modo manual multiplicando las funciones f y g.

Cuestiones matemáticas que debieron concluir las y los estudiantes hasta este momento: los ceros de las rectas van a coincidir con los ceros de la función cuadrática; el producto de dos funciones lineales resultará en una cuadrática, salvo que las rectas sean funciones constantes, o sea, con pendiente cero.

La intervención docente en este momento fue la de preguntar: ¿Conociendo las pendientes de las rectas vamos a saber qué concavidad tiene la parábola? Entonces concluyeron que para la consigna 2 la concavidad va a depender del signo de la pendiente de las rectas.

Las cuestiones concernientes a la consigna 3 del problema versan sobre el eje de simetría y el vértice en relación a cómo deben ser las rectas. Algunos grupos para buscar el vértice y el eje de simetría de la parábola trazaron una recta perpendicular al segmento de extremos en las raíces. Luego descifraron que esa recta debía ser la mediatriz y, a partir de esta, localizaron el vértice (Figura 22).

Figura 22



Se observa cómo construyeron el segmento entre las raíces de la función cuadrática y su mediatriz.

Quienes no identificaron el uso de la mediatriz, trabajaron con una perpendicular desde el punto cercano al vértice. Luego, con la herramienta ***Elige y mueve*** (arrastra o selecciona objeto) fueron moviendo y observando las coordenadas hasta identificar cuándo ese punto era un máximo.

Se propuso la discusión sobre cómo deben ser las rectas para que el vértice de la parábola obtenida a partir de su producto estuviese ubicado en cada uno de los cuatro cuadrantes.

Luego, a partir de esto se discutió en qué casos era posible y en cuáles no que la parábola resultante del producto de dos rectas tuviera máximo o mínimo en cada uno de los cuatro cuadrantes.

Es importante destacar que en este momento se arribó a la conclusión de que para poder graficar con este método, es necesario que las parábolas tengan raíces reales.

Un buen cierre del problema fue plantear situaciones que no se respondieron en ese momento, tales como:

- ¿Se puede, con este método del producto de funciones lineales, obtener una parábola con punto mínimo en el 1° y 2° cuadrante?
- ¿Y una parábola con punto máximo en 3° y 4° cuadrante?

La clase culminó con una revisión general de lo que se había trabajado, quedando pendientes las preguntas finales sin respuestas para el próximo encuentro de matemática.

d. Algunas conclusiones

Al finalizar los encuentros de los tres años entre docentes de la Escuela Secundaria y de la Universidad pudimos observar que se ha logrado una verdadera articulación entre ambos niveles debatiendo sobre problemáticas y situaciones reales que atravesamos en nuestras aulas. Los problemas que trabajamos fueron un disparador para pensar nuestras prácticas e intercambiar experiencias. Pudimos hablar y discutir sobre la realidad de nuestras y nuestros estudiantes y nuestras prácticas, y no de un imaginario.

Pudimos concluir conjuntamente que, para llevar a cabo el tipo de trabajo áulico que proponemos aquí, es necesario construir secuencias didácticas centradas en las actividades significativas que pueden realizar las y los estudiantes y ello a su vez implica ir modificando la visión clásica respecto a la organización de una clase. En este sentido, quizás lo más difícil sea abandonar algunos hábitos que la escolarización ha establecido, como por ejemplo el hecho de concentrar la atención solo en la o el docente, quien en muchos casos siente que siempre debe controlar todo lo que hacen las y los estudiantes en el espacio de la clase. También se observó que en algunos casos la costumbre de trabajar los temas en un orden inamovible era un obstáculo y que los mismos se podrían ir modificando según las necesidades de cada grupo.

Esta propuesta de seleccionar problemas más atractivos, como los nombraron en las devoluciones que tuvimos de los encuentros, y/o incorporar la tecnología a la enseñanza de matemática, nos permite generar en el aula estrategias de trabajo colaborativo entre pares. Esto favorece el intercambio entre las y los estudiantes a partir de la socialización tanto de preguntas individuales como las de los grupos, ya que las mismas pueden ser útiles para abrir el sentido de la problemática a desarrollar o para complementar o mejorar las propias producciones. Además, les permite realizar actividades de búsqueda de información y de análisis. Durante los intentos de resoluciones aparecerán algunas válidas y otras no, lo que estimulará posibles discusiones matemáticas entre estudiantes en la búsqueda de lograr la construcción de respuestas consensuadas. También permite que puedan reconstruir el nuevo conocimiento a partir de las estructuras conceptuales que ya poseen.

En la evaluación final se compartió que, en algunas oportunidades, tal vez por temor a lo desconocido o a lo poco explorado, nos brinda seguridad ofrecer a nuestras alumnas y nuestros alumnos una clase tradicional en lugar de brindarles la posibilidad de dejar que hagan otro tipo de trabajo más independiente, el cual bien guiado puede resultar mucho más satisfactorio y significativo. Lo que proponemos aquí no se trata de docentes pasivas o pasivos que dejen a sus estudiantes trabajar solas y solos, es más bien todo lo contrario. Para llevar a cabo este tipo de trabajo se requiere de una docente activa o un docente activo que interactúe con las y los estudiantes ayudando a complementar sus respuestas, motivando el análisis de diversas maneras de interpretar un planteo, invitando a estudiar diversas variantes de resolución ante una misma solución, estimulando la búsqueda de caminos más óptimos que otros.

Sería interesante poner en práctica el constante ejercicio de abrir el aula a la cotidianidad reconociendo la importancia que tiene el saber docente como gestor de la relación pedagógica. Se trata así de intentar una articulación entre lo que debemos enseñar y lo que a nuestras y nuestros estudiantes les podría resultar interesante aprender. En el intercambio se explicitó que esto puede tornarse algo difícil en algunas ocasiones, ya que en nuestra propia experiencia como estudiantes no lo vivenciamos, y que no habíamos recibido este tipo de orientación cuando nos formamos. Se trata de una aventura de la que estamos convencidas y convencidos que vale la pena ponerla en práctica. Tal vez las primeras veces no salga todo como lo planeamos, pero seguramente irá mejorando clase tras clase.

Por otro lado, es fundamental pensar en las Tics como herramientas enriquecedoras y complementarias para las clases y no como una carga difícil de llevar a la práctica. Uno de los aportes que brindan las tecnologías es el abrir la posibilidad de pensar una nueva matemática y junto con ella nos invita a pensar una educación diferente también.

Sabemos que en la actualidad las y los estudiantes / ciudadanos de Florencio Varela y sus alrededores, sienten que seguir estudiando es una nueva posibilidad para sus vidas por la cercanía de la UNAJ. Es por ello que afirmamos nuestro convencimiento de que creando nexos entre la universidad y las escuelas secundarias a las que asisten les permitirá ganar confianza en cuanto a sus aptitudes para acceder a los estudios superiores.

ISBN 978-631-90815-0-3

EDITORIAL | UNAJ