

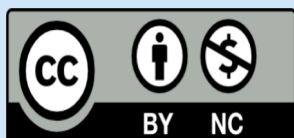
Trabajo final de grado

Belén Aldana Temperán

La utilización de recursos de geometría dinámica para el trabajo áulico con el área del círculo

2026 *Instituto de Estudios Iniciales,
Humanidades y Educación*

*Carrera: Licenciatura en Didáctica de la
Matemática*



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons.

Atribución – No comercial 4.0

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

Documento descargado de RID - UNAJ Repositorio Institucional Digital de la Universidad Nacional Arturo Jauretche

Cita recomendada:

Temperán, B. A. (2026). *La utilización de recursos de geometría dinámica para el trabajo áulico con el área del círculo* [Trabajo final de grado, Universidad Nacional Arturo Jauretche].

<https://rid.unaj.edu.ar/handle/123456789/3746>



Ciclo de complementación curricular: Licenciatura en Didáctica de la Matemática

Sede Exaltación de la Cruz

Artículo de investigación

La utilización de recursos de geometría dinámica para el trabajo áulico con el área del círculo

Belén Aldana Temperán

Introducción

La visión tradicional de la enseñanza en Matemática referida a las figuras geométricas focaliza el estudio de sus magnitudes por sobre sus propiedades; para ello recurre a la presentación de las fórmulas necesarias para luego dedicarse a su aplicación y así obtener resultados inmediatos. Dicho posicionamiento propone el desarrollo de los conceptos partiendo de los saberes acabados y ejemplificados para reproducirlos de manera semejante. Altamirano González (2019) califica esta práctica pedagógica como expositiva, repetitiva y abstracta siendo cada docente un transmisor de conocimientos y los alumnos tan solo receptores.

Desde la perspectiva actual, hacer matemática es resolver problemas por lo que se busca que las propuestas áulicas excedan la mecanización y la memorización de los conceptos matemáticos para habilitar la exploración, la deducción e integración de saberes precedentes poniendo al estudiante en un lugar activo y desafiante. En efecto, el proceso de construcción del conocimiento que éste realiza posibilita el desarrollo de competencias que puede trasladar a su vida cotidiana. Puntualmente en geometría, las situaciones problemáticas buscan habilitar la visualización, la experimentación, el razonamiento lógico, la argumentación y la aplicación a nuevas situaciones (Abrate, et. al, 2006).

Las actividades para hacer geometría pueden convocar a los estudiantes de manera diferenciada según el tipo de propuesta de trabajo que lleve adelante el profesor, influyendo el entorno o los recursos en que se desarrollen. Con mayor devenir histórico, la geometría estática impulsa la realización de construcciones a mano alzada con instrumentos de geometría clásicos: regla, compás, transportador, lápiz o tiza sobre papel o el pizarrón. No significa que todo trabajo con dichos elementos sea estático, solo en los casos en que la resolución se valga del correcto seguimiento de los pasos dados para generar la figura de análisis correcta en donde se verifique la consigna. Los avances tecnológicos dieron vida a la geometría dinámica que habilita la interactividad con las representaciones mediando un SGD (software de geometría dinámica o DGE, sus siglas en inglés). La interfaz del programa habilita la construcción de figuras y a su vez amplía la propuesta de trabajo permitiendo realizar modificaciones que inviten a establecer

conjeturas partiendo de la experimentación y la visualización (Bonelo-Ayala et al., 2024). Sin embargo, el planteamiento de la actividad a resolver puede tener carácter estático a pesar de construirse en un SGD. Para que sea efectivamente dinámica debe convocar al estudiante a determinar relaciones con definiciones y propiedades que conduzcan a reflexiones fundamentadas matemáticamente; que excedan la verificación del enunciado (Bifano y Villella, 2012).

En Argentina, entre los años 2010 y 2023 diversas políticas educativas como Conectar Igualdad otorgaron a estudiantes y profesores de instituciones públicas su propia computadora. Allí incluido entre los programas de base se encontraba el SGD llamado GeoGebra. El aprovechamiento de medios tecnológicos consta en el apartado de orientaciones y objetivos del área Matemática del diseño curricular de secundaria (modificado desde del año 2006), sin embargo, su implementación aún fluctúa. Entre las causas principales Vergara (2018) nombra la conectividad y la capacitación docente, dado que, la banda ancha de las escuelas, en ocasiones, no garantiza la correcta navegación y el alcance de la formación para la integración de tecnologías se vio limitado en relación a la población que obtuvo el beneficio. Por otro lado, su uso no asegura la construcción del aprendizaje. Las propuestas de implementación de las tecnologías en el aula pueden habilitar espacios de creatividad o reproducción según las propias características de cada actividad y cómo el docente orqueste recursos didácticamente para lograr mejores resultados en sus estudiantes (Drijvers et al., 2024).

En particular, las expresiones algebraicas de las relaciones métricas de la circunferencia¹ suelen enseñarse de manera tradicional, sujetas a la memorización y la aplicación mecanizada y por tanto ajenas de la comprensión de su determinación por parte de los estudiantes. Sin embargo, las fórmulas no surgen por magia y entenderlas contribuye al aprendizaje integral del contenido. En este caso, las expresiones algebraicas son posibles de construir desde la visualización. Zimmermann y Cunningham (1991) la definen como “the process of forming images (mentally, or with pencil and paper, or with the aid of technology) and using such images effectively for mathematical discovery and understanding” [el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel, o con

¹ Longitud de la circunferencia: $L = 2\pi r$ y Área del círculo: $A = \pi r^2$, siendo r el radio.

la ayuda de la tecnología) y utilizarlas eficazmente para el descubrimiento y la comprensión matemática] (p. 3). Los softwares de geometría dinámica invitan a los estudiantes a ser partícipes y descifrar qué está pasando al interpretar lo que observan, produciendo conjeturas y también validándolas. Sin embargo, no se trata de un proceso instantáneo, la construcción del pensamiento no se obtiene de la inmediatez ver→ presionar→ aprender, ocupa un rol de importancia la selección y gestión de las actividades por parte del docente.

En consecuencia, el presente artículo pretende focalizar en las potenciales explotaciones didácticas de GeoGebra para la enseñanza de una de las relaciones métricas mencionadas, el área del círculo, en segundo año de secundaria. Aquí es que surgen como interrogantes ¿de qué manera los docentes de matemática aprovechan didácticamente el programa GeoGebra? Y en específico, ¿cuáles son los criterios para seleccionar actividades a la hora de enseñar el área del círculo? ¿Están familiarizados con los recursos públicos sobre el tema que se hallan en GeoGebra para el desarrollo de la expresión algebraica buscada? ¿Los utilizarían en sus clases?

Planteamiento del problema

El abanico de alcance de las propuestas para la enseñanza de la matemática online es muy amplio. La plataforma GeoGebra, además de posibilitar construcciones individuales, cuenta con un espacio donde los usuarios comparten recursos matemáticos de manera pública para el uso de la comunidad. Muchas de estas propuestas invitan a comprobar que los cálculos conducen a los números correctos a medida que varían los datos (permitiendo observarlos). Por ejemplo, considerando la búsqueda *longitud de circunferencia y área de círculo* se obtienen los siguientes resultados iniciales²:

² Al deslizar, en la página se hallan más resultados de características variadas, de hecho, en este estudio serán considerados tres de ellos que se describirán luego.



Figura 1. Búsqueda en GeoGebra (Consultado en línea el 12/3/25)

Allí se identifica un archivo que se observa repetido. Este documento se distingue por incluir la leyenda “Copia de” en su nombre. Ello se debe a que el archivo fue seleccionado por otros usuarios, quienes lo generaron tomando como base el documento original titulado *Elementos del círculo y la circunferencia*. En él se encuentra:

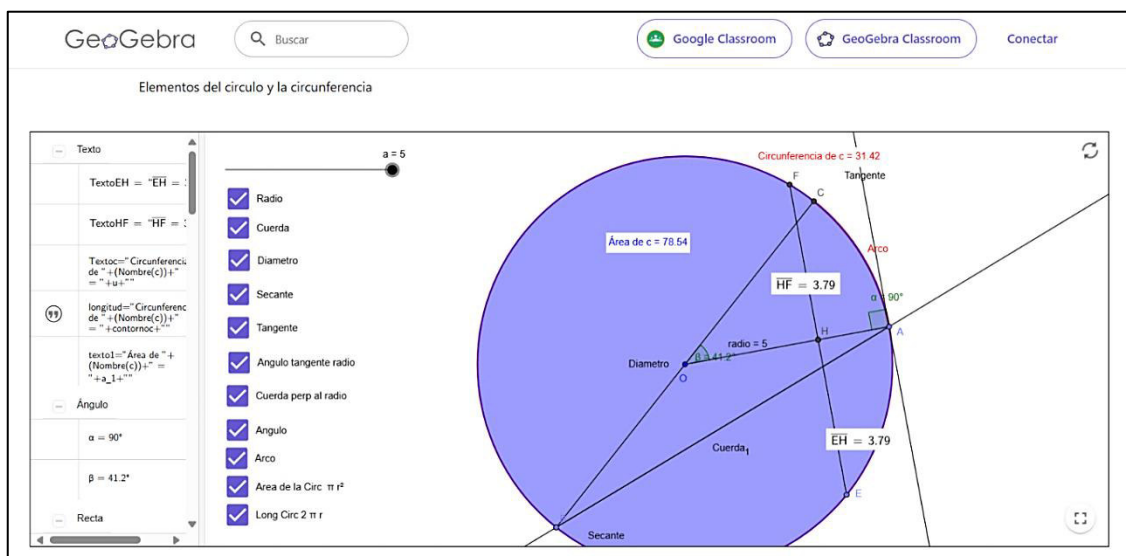


Figura 2. Archivo Elementos del círculo y la circunferencia (Consultado en línea el 12/3/25)

Mediante el clic en los casilleros puede verse un ejemplo de cada elemento: radio, cuerda, diámetro, secante, tangente, ángulo tangente al radio, cuerda perpendicular al radio, ángulo, arco; asimismo se hallan de manera explícita las expresiones de la longitud

de la circunferencia y área del círculo, junto con los resultados correspondientes para el radio entre los valores 1 y 5. No se solicita nada que resolver, sólo manipular y observar. Es un caso en el que ver no significa necesariamente comprender, contraponiendo los términos visión con visualización, siendo el primero sólo la percepción del sentido y el último, en cambio, la representación visual de un problema matemático que habilita el aprendizaje a través del descubrimiento (Zimmermann y Cunningham, 1991). En palabras de Bonelo-Ayala et al. (2024) “la enseñanza de la geometría debe fortalecer la intuición y la argumentación del estudiante, no sólo limitarse a la presentación de contenidos” (p. 45).

Para que la actividad que busque la expresión algebraica del área del círculo represente un problema es necesario que el resultado no sea evidente y articule un desafío posible. Los programas tecnológicos son una herramienta invaluable donde el papel fundamental lo tiene el docente en la selección y guía de las actividades áulicas (Camargo et al., 2006) ya que:

Es únicamente mediante diseños de situaciones de aprendizaje, gestionadas por el profesor, cuya meta apunte a la práctica de la justificación (...) como se puede aprovechar el potencial del software (p. 383).

Además, dichas autoras consideran que los programas de geometría dinámica son recomendados para los procesos de validación, condición que acerca a los estudiantes al verdadero trabajo de la comunidad matemática.

Entonces el aprovechamiento de la tecnología digital para la comprensión del contenido está estrechamente ligado a la planificación del docente: una actividad preparada de manera situada, donde se pueda reflexionar sobre el saber en cuestión: explorando, construyendo, generando debates, sacando conclusiones, entendiendo por qué tiene sentido hacerlo.

En consecuencia, será de interés el testimonio del desarrollo del tema por parte de diferentes profesores de matemática que se desempeñen o hayan desempeñado en segundo año de la escuela secundaria y trabajen con GeoGebra en sus clases, con el fin

indagar en sus criterios de selección y opiniones al respecto sobre el uso del SGD para esta temática en particular.

Marco teórico

En el Diseño Curricular para la educación secundaria de 2do año en Argentina, en el apartado de Matemática, se enuncia que “Hacer Matemática es, básicamente, resolver problemas” (Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires [DGCyE], 2007, p. 295), frase que se observa levemente parafraseada en los diseños curriculares de los años restantes.

En este contexto cobra importancia la definición de problema. Se trata de una tarea que lleva tiempo y análisis, que puede además tener distintos caminos de resolución, a la vez que, múltiples soluciones. Busca que el estudiante investigue, utilice la intuición y profundice en el conjunto de conocimientos y experiencias anteriores. Luego, que pueda establecer y poner en práctica un plan para resolverlo y sea capaz de verificarlo, construyendo nuevos conocimientos matemáticos. Las aplicaciones de los problemas están abiertas a posibles variantes, generalizaciones y nuevos problemas. Que una tarea llegue a ser un problema depende tanto de los estudiantes como de los profesores. Influirán los conocimientos previos del estudiante y su actitud ante ella, como también de qué manera sea introducida y trabajada por el docente a lo largo de la clase (Salinas, Sgreccia, 2017).

De acuerdo a lo propuesto por Balacheff (2000) el software educativo representa un instrumento positivo para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática considerando la elección del medio digital correcto para el conocimiento específico que se pretenda enseñar desde la experimentación. Es tarea del profesor encargarse de que dicha selección no genere obstáculos para el estudiante y que, de manera autónoma, éste pueda manipular y sacar conclusiones. La resolución de problemas mediando entornos digitales exige, estando adecuadamente planteados, involucrar conocimientos matemáticos diversos que se integran armónicamente para dar con la solución a la vez que queda en evidencia lo gráfico. Allí ganan sentido los distintos procedimientos: si encuentro lo que esperaba queda validado y si no, habilita a repensar el recorrido interpretando lo que veo.

Como resultado del cruce entre softwares y Geometría euclidiana nace la geometría dinámica. Un elemento clave es el desplazamiento (o arrastre): las figuras realizadas conservan las propiedades geométricas durante el movimiento (variando de acuerdo al procedimiento de construcción). Es decir, el estudiante puede intervenir la representación terminada tomando, por ejemplo, uno de los puntos que la forman para modificarla. Sin embargo, el mero movimiento para constatar las propiedades geométricas no conlleva un razonamiento matemático (Restrepo, 2008). Es cuando el desplazamiento permite explorar, realizar conjeturas y validarlas que habilita la resolución de un problema. La autora clasifica a este tipo como Desplazamiento para validar/invalidar una conjetura, llevado a cabo a partir de la observación de las regularidades de la figura.

Las construcciones que tienen lugar allí se diferencian en robustas o suaves (Lupinacci, 2023). Las primeras mantienen sus propiedades invariantes independientemente de la manipulación de la figura; a diferencia de las segundas donde la propiedad no está prefijada de antemano. Dicho de otro modo, mientras que en las robustas el arrastre suele utilizarse para verificar los pasos de la construcción y sus características, en las suaves suele ser exploratorio. Ambas se complementan para la enseñanza de conocimientos variados según el propósito de la actividad. Por ejemplo, las construcciones suaves pueden utilizarse para caracterizar una figura estudiando las relaciones entre sus elementos (de lo local a lo general); en cambio, las construcciones robustas son de ayuda para recorrer los casos en que se verifica un teorema (de lo general a lo local). En referencia a estas últimas, se considera que “facilitan la gestión de la actividad, proporcionan un ahorro de tiempo y precisión respecto a un tratamiento de papel y lápiz, y generan una mayor implicación de las y los estudiantes permitiéndoles descubrir las propiedades por sí mismos” (Lupinacci, 2023, p. 5). La validación ocurre a nivel visual para los estudiantes, por ello será parte del razonamiento problematizar los elementos invariantes que definan dichas propiedades a través de la retroalimentación del software y la mediación docente.

La plataforma GeoGebra es un SGD que se funda como un servicio gratuito y abierto. Cuenta con diferentes herramientas para el trabajo en las áreas de geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficas, estadísticas y cálculo. Ofrece recursos dinámicos

predeterminados de temáticas muy diversas posibilitando incluso su modificación para adaptarlos a los objetivos que el docente persiga dando su toque didáctico. Basta con ingresar en el buscador alguna palabra significativa del tema y observar el material disponible. Luego, para que los estudiantes accedan a la actividad y trabajen con ella desde la computadora o el celular se les debe compartir el enlace (Vitabar, 2014). En Argentina, diversos organismos oficiales promueven la incorporación de GeoGebra en la enseñanza matemática como el portal Educ.ar³ y el Instituto Nacional de Educación Tecnológica (INET)⁴.

En el campo de la investigación en educación matemática para la integración de la tecnología digital en la enseñanza y aprendizaje convergen actualmente cuatro enfoques teóricos (Perez Medina, 2014). En particular, en este trabajo se profundizan la Aproximación Instrumental (AI) y la Orquestación Instrumental (OI) desarrollados por Rabardel (2011) y Trouche (2004) respectivamente.

La AI marca la diferencia entre artefacto e instrumento de manera que, cuando el estudiante comprende la utilidad del objeto material o simbólico (el artefacto) y lo manipula, este se convierte en instrumento para desarrollar una actividad. El proceso de elaboración de esta habilidad se llama génesis instrumental y consta de una dimensión de instrumentalización dirigida al artefacto (reconocimiento, funciones) y otra de instrumentación dirigida al sujeto (cómo lo puede utilizar para resolver algo particular). Un artefacto puede consolidarse como instrumentos distintos de acuerdo al esquema de utilización que se le asigne; por ejemplo: utilizar Google Maps para buscar cómo llegar a un lugar específico o, en su lugar, para medir la distancia entre dos lugares. Además, un mismo esquema de utilización puede relacionarse con artefactos diversos; por ejemplo: si lo que se busca es graficar una circunferencia puede hacerse en GeoGebra (software matemático) o en Paint (programa de dibujo).

Para el desarrollo de una tarea dentro de esta teoría el sujeto deberá considerar cómo trabajar con nuevos artefactos o resignificar los que conoce para asignarles nuevos usos que los constituyan en instrumentos que habiliten soluciones. De acuerdo al planteo del

³ [Listado de recursos | Educ.ar, portal educativo de la Secretaría de Educación](#)

⁴ [Colección Matemática | Instituto Nacional de Educación Tecnológica](#)

profesor la función de esos artefactos puede ser explícita (caja de vidrio) para que el estudiante la considere a la hora de resolver o implícita (caja negra) porque es el objeto de la actividad. Allí se expresa el concepto de transparencia operativa (Rabardel, 2011) según el cual la variación de visibilidad de los artefactos se encuentra condicionada por la finalidad que persigue la acción.

Al respecto, Trouche (2004) hace foco en cómo las génesis instrumentales de los estudiantes son resultado de la organización didáctica y selección de los artefactos por parte del docente. Esta articulación en actividades computarizadas recibe el nombre de orquestación instrumental en sintonía con la metáfora del profesor como director de una orquesta con músicos de experiencia diversa, buscando guiarlos para sacar lo mejor de ellos en conjunto, dejando a un lado la idea de perfección. Tiene una doble dimensión: global porque el profesor puede presentar las mismas propuestas a cursos diferentes y local porque justamente al variar los destinatarios deberá hacer ajustes. Para llevarse a cabo, la orquestación tiene tres elementos:

- La configuración didáctica: se selecciona y dispone a la clase el artefacto que potencie de la mejor manera el objetivo de la actividad.
- El modo de explotación: de acuerdo al conocimiento que se espera perseguir la propuesta priorizará ciertos esquemas por sobre otros en la configuración de los instrumentos por parte de los estudiantes.
- La actuación didáctica: improvisaciones propias del momento como dudas, aportes o cuestiones técnicas⁵.

Esta teoría concibe como procesos diferentes interacción e interactividad. Como resultado de intercambios comunicacionales se define la interacción entre personas, siendo que, al nivel del aula y durante las actividades, podrán ocurrir entre estudiante-docente y estudiante-estudiante. En la medida en que el estudiante manipula el entorno digital éste le devuelve retroalimentaciones, dando lugar a la interactividad. Sin embargo, muchas veces no será suficiente el trabajo unívoco con el software dado que “el conocimiento no puede simplemente leerse en la pantalla” (Balacheff, 2000, p. 94). En consecuencia, la intervención docente brindará nueva retroalimentación que

⁵ Elemento incorporado por Drijvers et al. (2024)

complete el proceso de interactividad y permita al estudiante el desarrollo del instrumento.

Las orquestaciones pueden clasificarse según en qué actor se centren, en el profesor o en el estudiante. Las que inviten al copiado de demostraciones técnicas, explicaciones del trabajo paso a paso o traduciendo la pantalla en el pizarrón serán del primer tipo ya que el profesor domina la comunicación: hay menos interactividad y mayor grado de interacción estudiante-docente. En cambio, si apuntan a la exploración autónoma y explicar resoluciones desde la pantalla para generar debates serán del segundo tipo ya que los estudiantes interactúan y sacan conclusiones: hay más interactividad y mayor grado de interacción estudiante-estudiante.

Es inherente a la Matemática el estudio de patrones que puedan aplicarse en ámbitos diferentes. En consecuencia, es natural intentar encontrar formas efectivas de analizarlos. La visualización matemática se alza como un proceso cognitivo para la comprensión de un problema, mediando la formación de imágenes (mentales, a mano alzada o digitales). De manera complementaria deben intervenir otras formas de representación matemática: numéricas y simbólicas (Zimmermann y Cunningham, 1991). Según Arcavi (2003), la visualización puede explotarse como:

- Apoyo e ilustración de resultados esencialmente simbólicos (y posiblemente proporcionando una prueba por sí misma).
- Una posible forma de resolver conflictos entre soluciones simbólicas (correctas) e intuiciones (incorrectas).
- Comprender conceptos y significados que la solución simbólica podría obviar fácilmente.

En la enseñanza moderna de las matemáticas se privilegian los procedimientos algebraicos por sobre los visuales (González Hernández et al., 2021). No obstante, los recursos geométricos dinámicos tienen, desde esta perspectiva, el potencial para que los estudiantes vivencien el camino de descubrimiento de un matemático.

El álgebra escolar persigue el desarrollo del razonamiento o pensamiento algebraico que consiste en “un proceso de generalización para formular expresiones algebraicas o

patrones, ecuaciones y funciones, el cuál utiliza el lenguaje algebraico y su simbología en busca de precisión” (Serres Voisin, 2011, p. 126). Hace énfasis en que la comunicación con la tecnología tiene que ocurrir con la intención de resolver problemas y no como la aplicación de técnicas practicadas previamente. Respecto al trabajo geométrico manifiesta que carga de sentido al lenguaje algebraico y conduce una iniciación en el álgebra de manera convocante.

Para Camargo et al. (2006) “los programas de geometría dinámica permiten vincular la exploración con la demostración, en el ámbito de la geometría euclidiana” (p. 372). Caracterizan la actividad demostrativa en dos procesos no necesariamente excluyentes: uno destina acciones a producir una conjetura y el otro las lleva adelante para producir una justificación. El primero promueve la comprensión del contenido matemático y el segundo apunta a la validación dentro de un sistema teórico en construcción. Las acciones mencionadas se clasifican en:

- La visualización: para detectar, percibir o evocar propiedades geométricas de la representación gráfica.
- La exploración: para descubrir propiedades o relaciones entre propiedades.
- La formulación de conjeturas: para explicitar matemáticamente y de manera general un hecho geométrico que se reconoce mediante casos particulares.
- La verificación: para poner a prueba el resultado.
- La explicación: para argumentar resultados.
- La prueba: para validar los resultados, pero de manera incompleta por omisión o errores.
- La demostración formal: para justificar como resultado de implicaciones fundamentadas en el sistema axiomático.

Sin embargo, “los procesos de prueba no se reducen a la elaboración de pruebas formales” (Sánchez Sánchez, 2003, p. 32) siendo que los estudiantes realizan un trabajo matemático demandante para tener certeza de sus respuestas sin llegar a la demostración. Son las llamadas pruebas pragmáticas por Balacheff (1999) y refieren a la informalidad del lenguaje que justifica las acciones realizadas para obtener resultados desde la visualización. En cambio, cuando las pruebas alcanzan la exigencia de

formalidad de la definición de los objetos, sus propiedades y relaciones, se tornan pruebas intelectuales. Por ello, no se pretende en este estudio obtener el grado de demostración formal considerando el nivel escolar donde está inmerso el contenido, lo que se busca es que las exploraciones de las figuras desencadenen razonamientos para conjeturar, verificar y validar.

La finalidad del trabajo con recursos dinámicos para alcanzar la expresión algebraica del área del círculo impulsa la construcción de conjeturas, hecho que no es trivial. De acuerdo con Bonelo-Ayala et al. (2024):

La conjeturación se convierte en una de las múltiples formas de aprender y enseñar matemáticas, pues en ella se vislumbran elementos del conjeturador que surgen en el camino a la conjetura, como lo son los procesos cognitivos, las formas argumentativas, los registros de representación, las estructuras y los elementos de control (p. 48).

Se trata del camino inverso a la enseñanza tradicional que parte del enunciado de la propiedad para la comprobación.

Metodología

Al tratarse de una investigación educativa, los hechos quedan enmarcados en la complejidad de lo social, resultando contradictorios, flexibles y situados. Por ello se buscará la obtención de datos cualitativos, de manera que pocos casos resulten significativos para inferir conclusiones propias del grupo del que se toma la muestra.

A tal fin, tendrá lugar la realización de entrevistas con preguntas abiertas a tres profesores de Matemática de la Universidad de Luján que trabajen además en escuelas secundarias, que se desempeñen o hayan desempeñado en segundo año y utilicen Geogebra en sus clases. Teniendo en cuenta el testimonio de abordaje del tema por parte de los docentes se pretende indagar en sus criterios de selección y opiniones sobre el uso del SGD.

Los interrogantes⁶ abordados buscan, en primer lugar, establecer el perfil del docente entrevistado para brindar contexto a sus experiencias. Luego, se indaga sobre la utilización del SGD y el conocimiento de los recursos específicos para la enseñanza del concepto geométrico de interés: el área del círculo. Por último, se proponen tres recursos dinámicos con miras hacia cuál resulte más adecuado, desde su perspectiva, para alcanzar la expresión algebraica y cómo llevaría adelante la implementación cada docente.

La selección de los recursos dinámicos parte del resultado de ingresar el concepto en el buscador de recursos de la plataforma GeoGebra. Entre los resultados pueden observarse dos clases de recursos: los que se relacionan con circunferencias o círculos pero no se abocan a la expresión algebraica (por ejemplo, el foco está en el trabajo con la ecuación de la circunferencia) y, los que responden al concepto de interés. De este último grupo se seleccionaron tres construcciones robustas con información circundante variada que no tuvieran errores (los deslizadores funcionan correctamente y no presentan inconsistencias en la construcción de las figuras). Son los siguientes:

- ❖ En el recurso dinámico 1 (R1) se halla un círculo en un sistema de ejes cartesianos. El eje y está graduado con números enteros, desde -2 hasta 5 , mientras que el eje x establece la escala en múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, desde $-\pi$ hasta 4π . Inicialmente cuenta con tres deslizadores: n refiere a los lados de un polígono inscripto en el círculo, r es la medida del radio del círculo y *moviment 1* sectoriza el polígono en n triángulos isósceles iguales y los reorganiza progresivamente mediante un giro en sentido horario. A medida que avanza el movimiento los triángulos quedan ubicados de manera horizontal a la derecha del origen y, por lo tanto, en el primer cuadrante. Luego del desarrollo de este último se activa el siguiente deslizador, *moviment 2*, que divide las partes superiores de los triángulos a la mitad de la altura para completar los espacios intermedios y generar un rectángulo. Por último, aparece el deslizador *moviment 3* para encimar las mitades del rectángulo anterior y formar uno nuevo cuya altura y base son menores que r y $\pi.r$ correspondientemente (quedando explícitos dichos parámetros). Se encuentran debajo oraciones escritas

⁶ Ver Anexo 1: Estructura de las entrevistas

em português que incluem quantidades que variam segundo n e r . Buscam comparar a medida da área do polígono com a do círculo, deduzindo-se que a medida que o polígono ganhe mais lados terá a área mais próxima à do círculo, logrando a equivalência quando n tenda a infinito. Em este caso, o objetivo pode conseguir-se com a manipulação de unicamente os deslizadores n e r . Los demás (*moviment 1, 2 y 3*) manipulan la figura a modo de verificación de los cálculos que están programados. Tal cual se observa no se problematiza la construcción de la expresión algebraica ya que puede verse explícita.

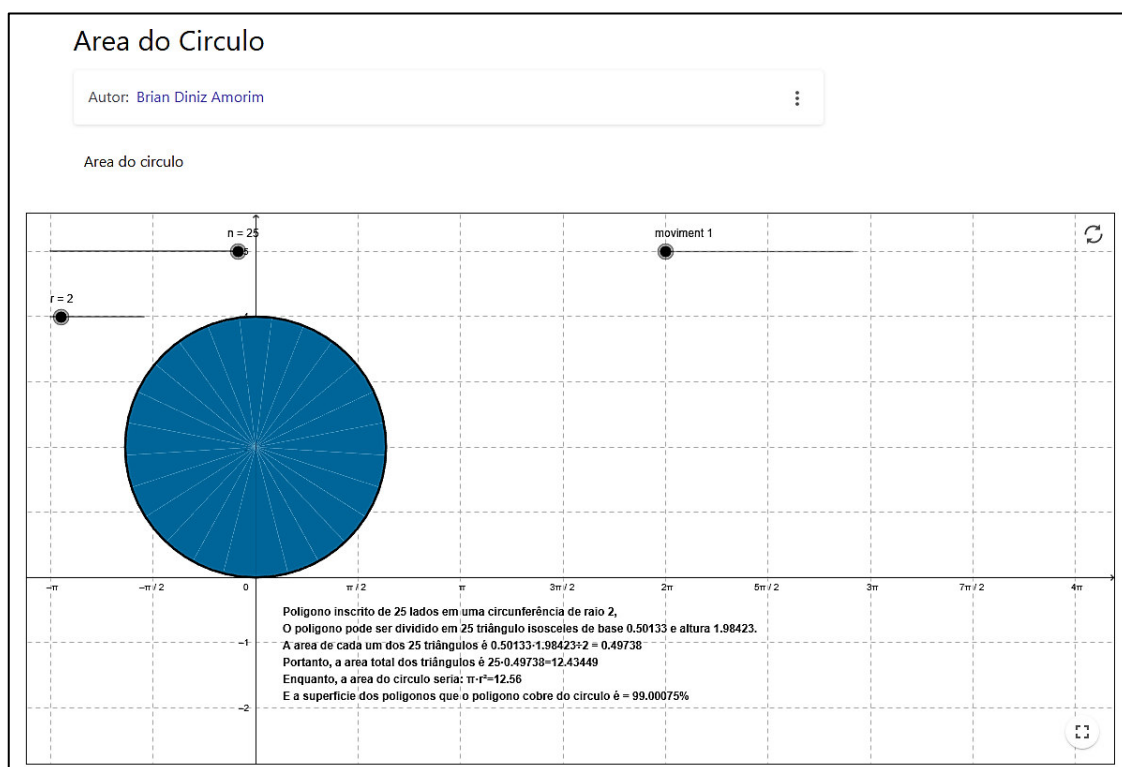


Figura 3. Recurso dinámico 1 (R1). Disponible en <https://www.geogebra.org/m/qRtwKuxT>

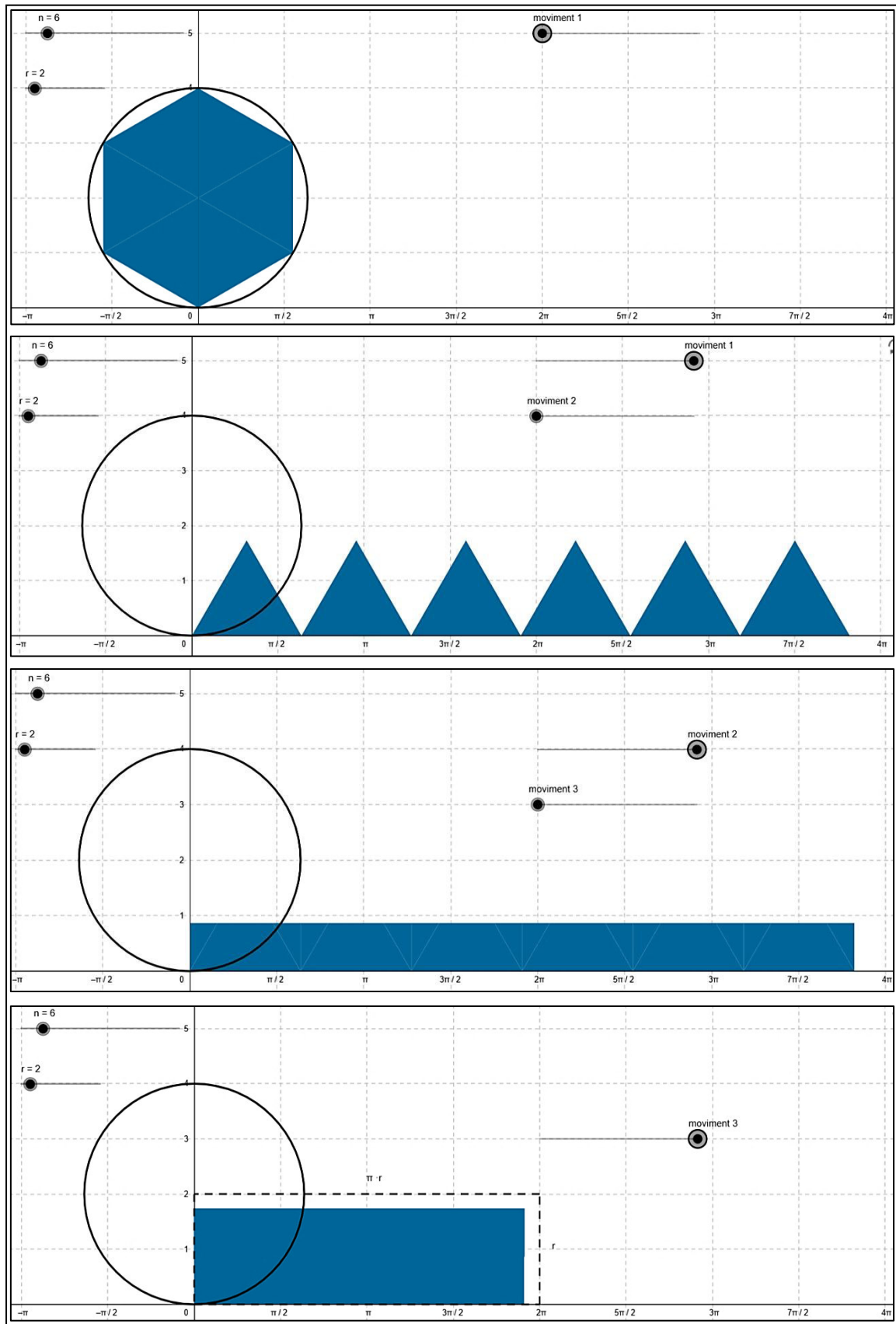


Figura 4. Secuenciación de R_1 para $n=6$ y $r=2$.

- ❖ En el recurso dinámico 2 (R2) se observan de izquierda a derecha un rectángulo y un círculo. Cuenta con cuatro deslizadores: el que modifica el radio, el que divide en n partes iguales al círculo y los dos restantes llevan el nombre *Muéveme*. El primero de arriba hacia abajo produce el movimiento de los sectores circulares sobre el rectángulo, de manera que los correspondientes a cada mitad del círculo se destacan con un color diferente (azul o amarillo) y se disponen enfrentados. El segundo acompaña con el traslado de los parámetros r y $r\pi$ marcados con rojo, configurándolos como la altura y la base del rectángulo. A medida que n aumenta el área del conjunto de sectores circulares se aproxima a la del rectángulo. Este recurso no explicita el objetivo del autor dado que no hay elementos complementarios; sin embargo, podría inferirse que persigue la construcción de la expresión algebraica del área del círculo ya que está ausente.

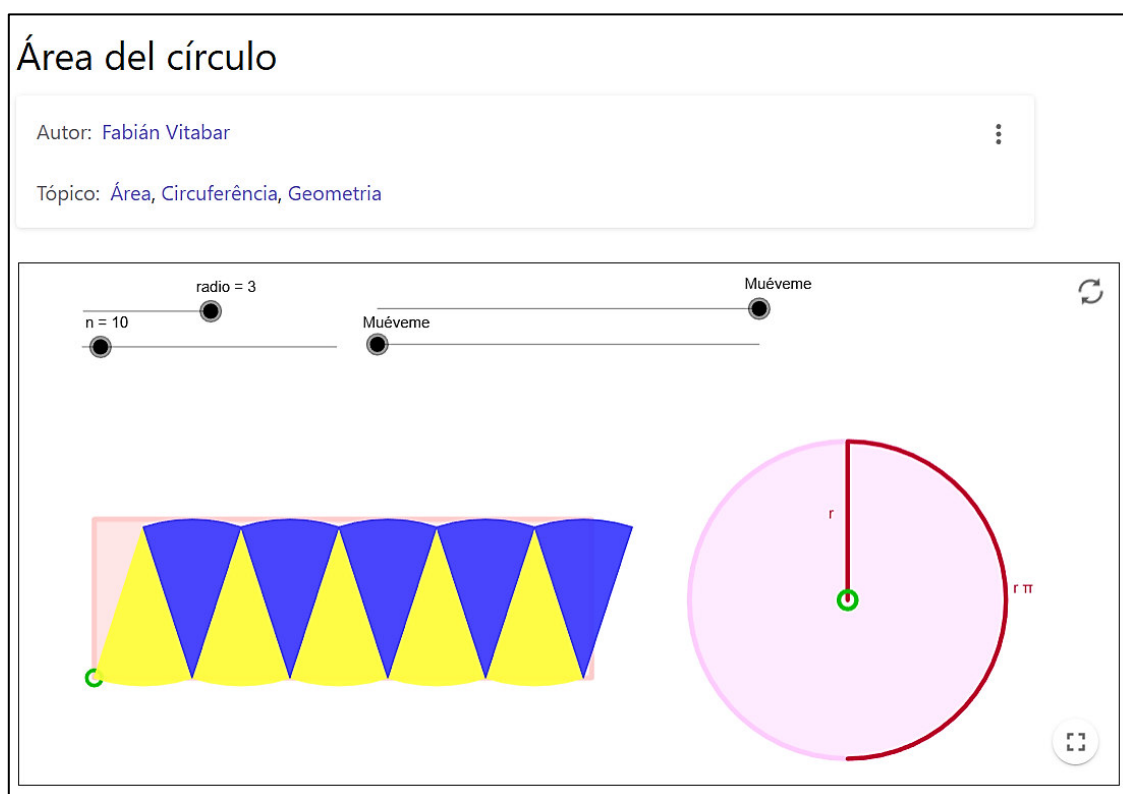


Figura 5. Recurso dinámico 2 (R2). Disponible en <https://www.geogebra.org/m/at5XVmWF>

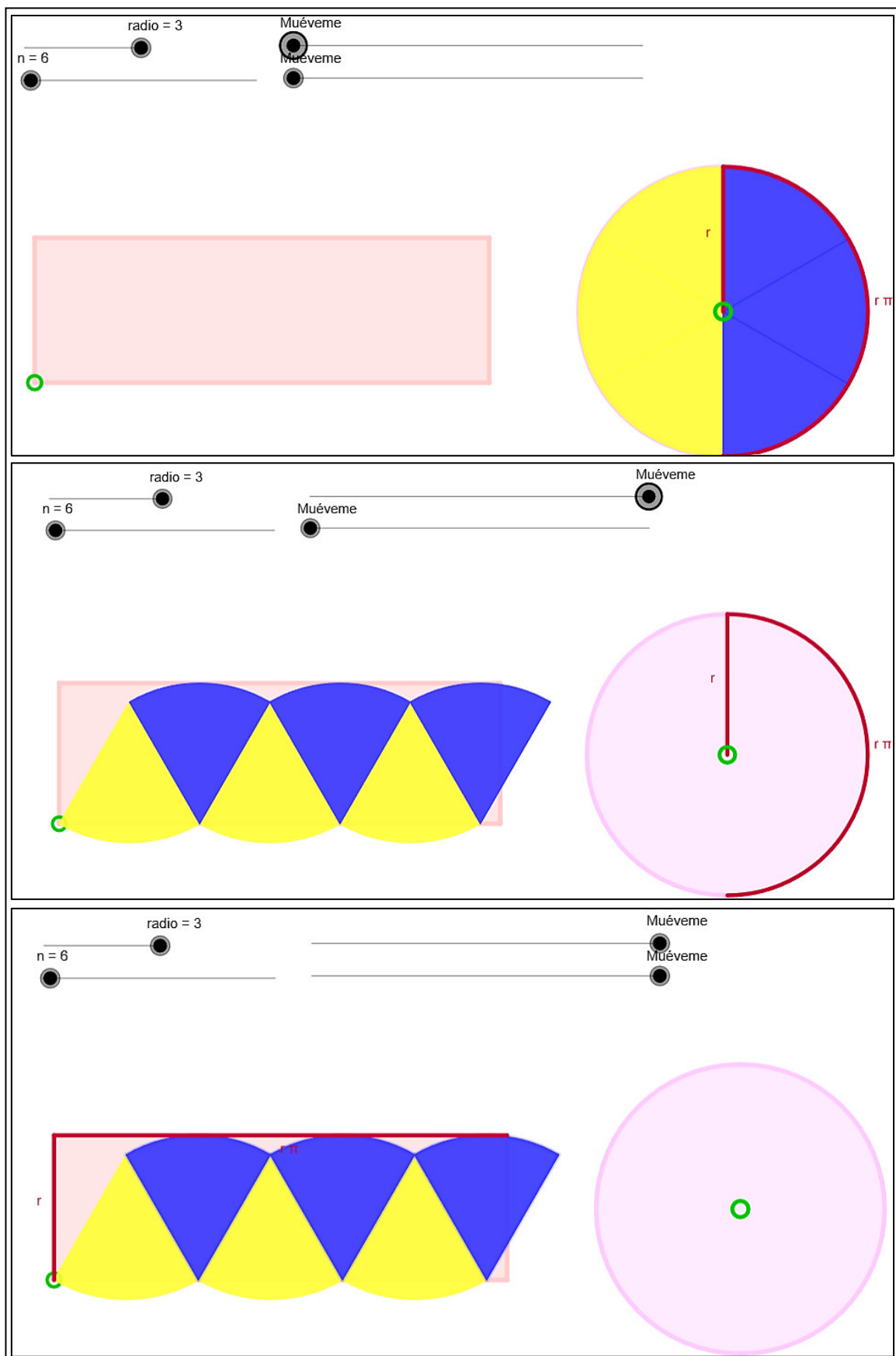


Figura 6. Secuenciación de R2 para $r=3$ y $n=6$.

- ❖ En el recurso dinámico 3 (R3) se presenta un polígono regular circunscripto que muestra uno de los triángulos equiláteros que se forman con vértice en el centro y un lado por base. Nombra a su altura como la apotema del polígono. Los dos deslizadores que se observan modifican la medida del radio (r) y la cantidad de lados del polígono (n). También se desarrollan los cálculos del área de ambas figuras, el polígono y el círculo, que varían de acuerdo a r y n , permitiendo ver la semejanza de las magnitudes a medida que n crece. Por último, debajo se muestra la deducción de la expresión algebraica para el área del círculo partiendo de la del polígono. Considerando los lados tendiendo a infinito ocurren dos equivalencias: el perímetro del polígono con la longitud de la circunferencia, y la apotema con el radio. Al reemplazar ambos se arriba al área del círculo. Considerando que la expresión algebraica de interés consta explícitamente no se problematiza su construcción, más bien, el recurso ejemplifica para verificar.

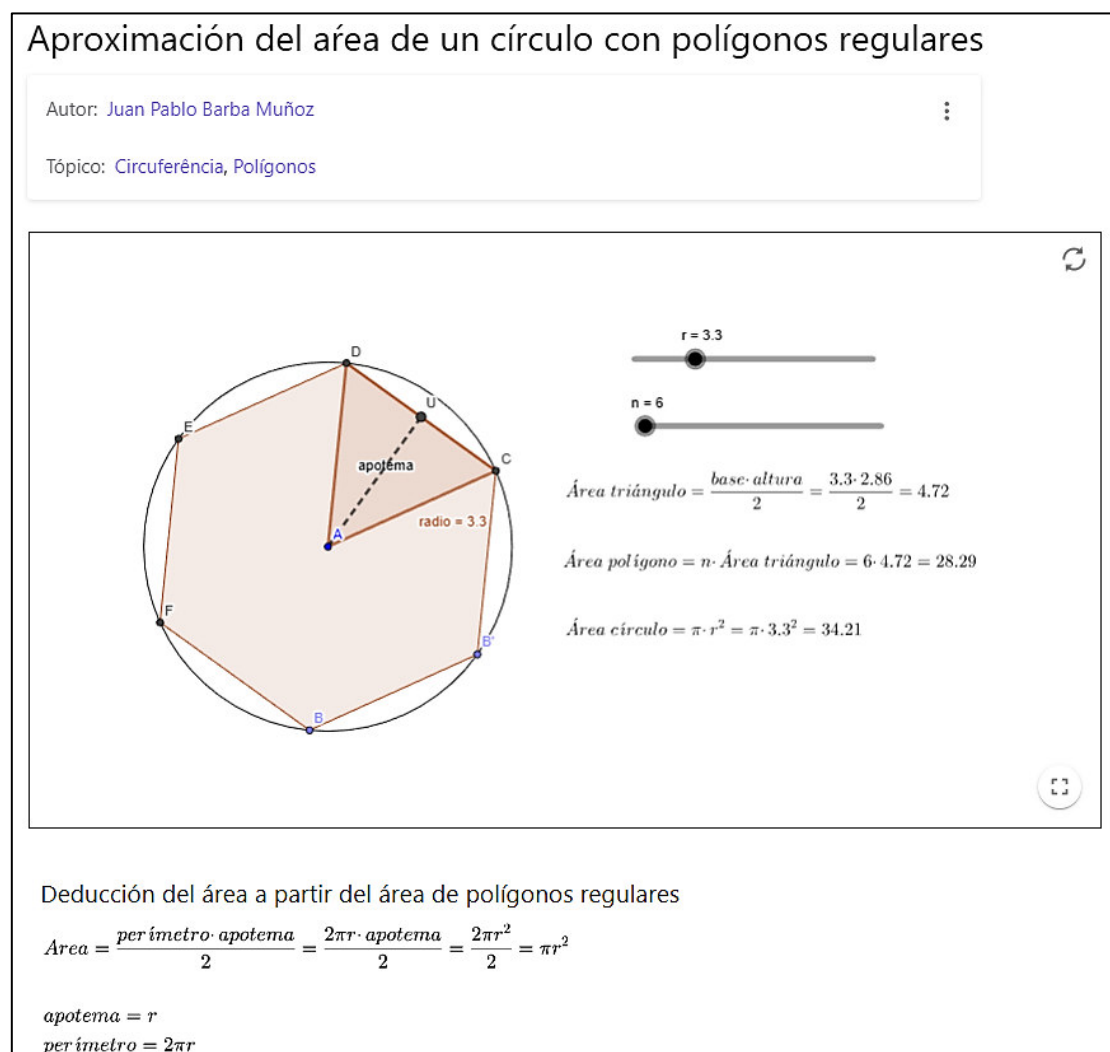


Figura 5. Recurso dinámico 3 (R3). Disponible en <https://www.geogebra.org/m/e7vG4wtz>

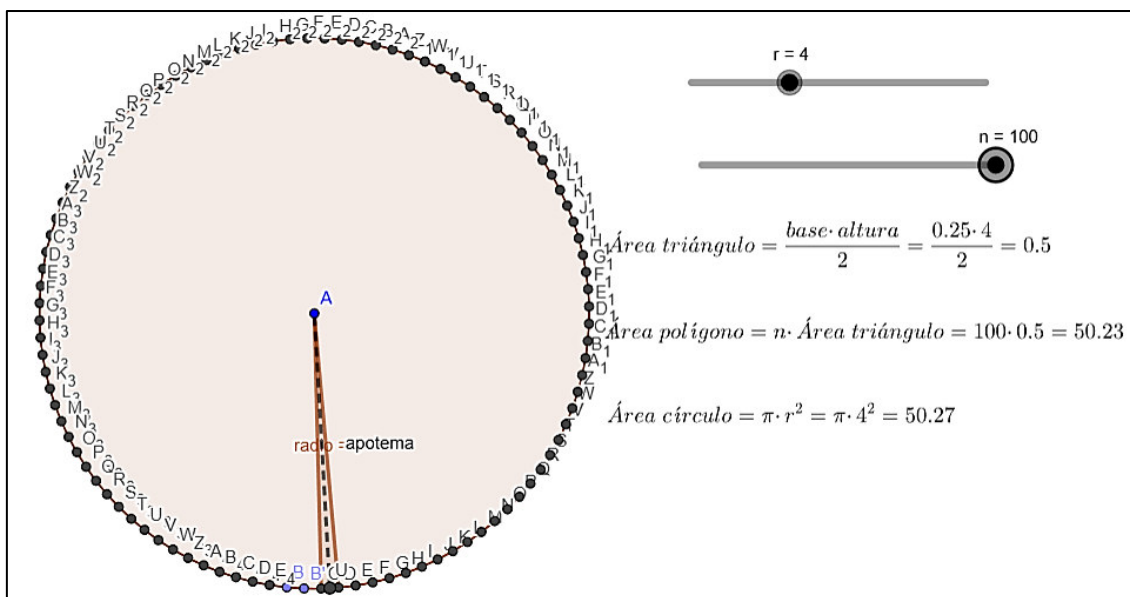


Figura 6. Visualización de R3 con $r=4$ y $n=100$.

Mediante las entrevistas no se pretende establecer aspectos valorativos de los recursos según lo que observan e interactúan, sino hacer explícitas las concepciones docentes sobre las características percibidas, la influencia de éstas en la selección de los recursos y las potenciales implementaciones que realizarían de los recursos seleccionados en clase, incluyendo posibles modificaciones para ajustarlos al desarrollo de la expresión algebraica⁷.

Análisis de las entrevistas

En el nivel secundario, los profesores A, M y R se desempeñan sólo en instituciones privadas, sólo públicas o en ambas respectivamente. Mencionan que su acercamiento a GeoGebra tuvo lugar tanto en la formación de licenciatura como en capacitaciones optativas. A y R manifiestan desconocer los recursos públicos de GeoGebra, mientras que M los utiliza para algunos temas de sexto año y la universidad. Sobre la manera en que lo implementan en sus clases, A y R destacan las acciones mostrar y verificar, manteniéndose el programa en carácter de artefacto para los estudiantes, lo que les imposibilitaría realizar la génesis instrumental ya que no lo manipulan. En cambio, M comparte el link del recurso que usen para que cada uno de los estudiantes pueda

⁷ Ver Anexo 2: Entrevistas

explorar en su computadora, dando paso a la interactividad que lleve a la conformación del instrumento que habilite las soluciones.

A la hora de enseñar las relaciones métricas de la circunferencia expresan que tiene lugar en el ciclo básico (1^{ro}, 2^{do} y 3^{ro}), hecho que amplía la propuesta del diseño curricular. Respecto de la secuenciación implementada, varía en cada caso. La profesora A retoma las fórmulas que trabajaron en primaria para aplicarlas directamente a operaciones algebraicas y ecuaciones. El profesor R opta por medir con un hilo objetos circulares para discutir la medida de π y, luego de formalizar las expresiones algebraicas, aborda ecuaciones. Por otro lado, M propone la observación de circunferencias con radios variables en un recurso dinámico para comprobar los resultados arrojados por las fórmulas. Este último caso es el único que considera implementar GeoGebra en el desarrollo del tema.

Ante la situación de selección de un recurso para la construcción de la expresión algebraica del área del círculo los tres profesores, en el diseño de la configuración didáctica hipotética, eligen trabajar con R1 justificando que es intuitivo, dinámico, completo y más cercano a la manipulación tangible. Sin embargo, todos le harían modificaciones en torno a la transparencia operativa necesaria para arribar al objetivo; en principio, que pase de ser una caja de vidrio a ser una caja negra: se remueve la expresión algebraica del área del círculo. También se alude a la variación de las oraciones restantes: A y R las eliminarían por completo, en particular, R las reemplazaría por la consigna de la actividad correspondiente al recurso; M sólo eliminaría la referida al porcentaje de aproximación y a las demás las traduciría al español. Otro aspecto evaluado fue la graduación del eje x expresada en múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, en todos los casos coinciden que debería visibilizarse una aproximación decimal, sólo A conservaría ambas escrituras para diferenciar la aproximación del número completo. Por último, la profesora M señaló que además asignaría otro color para percibir mejor las particiones del polígono y reflexionó sobre la posibilidad de realizar más modificaciones luego de llevar el recurso al aula, con más información sobre las dificultades que surjan entre los estudiantes.

Para los recursos que no fueron seleccionados surgen argumentos en común. En principio, R2 se descarta por trabajar con figuras no euclidianas que deberían problematizarse durante la actividad para no confundir a los estudiantes. Por otro lado, expresan que R3 podría ser más apropiado para el ciclo orientado ya que propone integrar más contenidos y puntualiza en el trabajo algebraico.

Las propuestas de actividades con R1 encuentran intersección en habilitar un primer momento de visualización y exploración autónoma guiada. En particular, la profesora A otorga un escenario real para dar sentido al estudio del área incluyendo en la consigna la necesidad de comprar tela para una cama elástica circular. El desarrollo de la actividad en todos los casos comienza fijando un radio para variar los lados del polígono inscripto de manera creciente, uno por vez, completando los movimientos con los deslizadores *moviment 1, 2 y 3*. Luego se elige otro radio y se vuelve a realizar el recorrido, promoviendo la interactividad. Esta primera parte culmina con el cálculo de las áreas para cada polígono mediante el rectángulo asociado obtenido. Para ello, los estudiantes tienen que poder interpretar las medidas de la altura y la base de manera estimada siguiendo las referencias de la escala en cada eje del plano. En este punto, el profesor R menciona el uso de la calculadora para no obstaculizar la resolución ya que el foco está en los razonamientos que devengan de los resultados. En la misma línea, la profesora M opta por no eliminar parte de la información escrita en el recurso para contribuir a la verificación de las cuentas.

El segundo momento se caracteriza por el traslado de la información recogida por los estudiantes al pizarrón, con la intención de formular conjeturas. Las intervenciones docentes para invitar al debate circundan las preguntas: ¿Cómo llegaron a los resultados? ¿Qué regularidades hay en las cuentas? ¿Qué se puede concluir al ver los resultados? El aumento del área se visualiza cuando la cantidad de lados se incrementa, independientemente del radio, pero no alcanza a completar el espacio que ocupa el círculo, no se llega a la línea punteada para $n=25$ (Figura 5). Allí el recurso aporta a la verificación y a la explicación ya que el último deslizador muestra la medida de los lados en función del radio del rectángulo asociado al polígono.

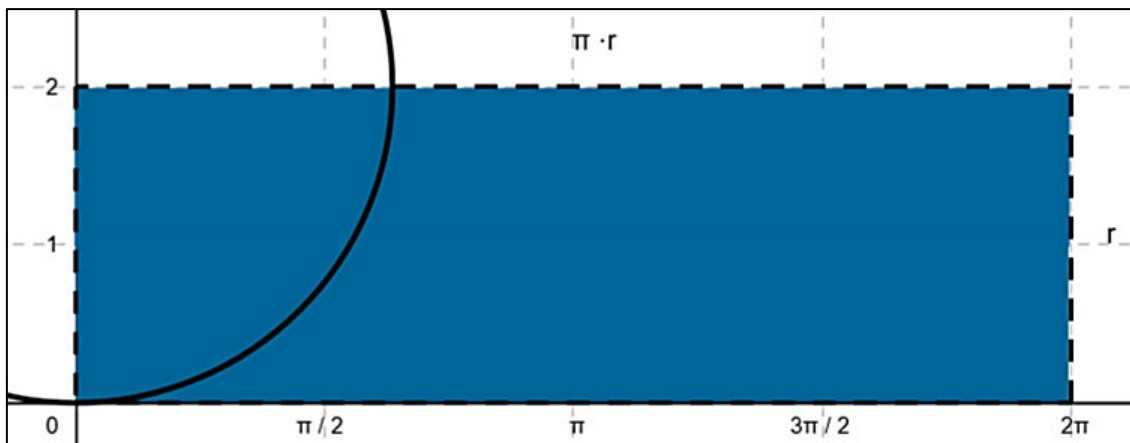


Figura 7. Recorte de R1 luego de deslizar por completo *moviment 3*, con $r=2$ y $n=25$.

Como cierre se formula la expresión algebraica del área del círculo y, para los casos de R y M, se reflexiona sobre cuántos lados debería tener el polígono para tener la misma área que el círculo, permitiendo inducir la noción del infinito. El objetivo que la actividad persigue es consolidarse como una prueba pragmática para el hallazgo de la relación métrica de interés.

Los tres profesores concuerdan en que sus estudiantes podrían recorrer la actividad y obtener la expresión buscada, mencionan que cuentan con computadoras en sus escuelas. La profesora A agrega que, pensando en la escuela en la que trabaja en la actualidad, es una actividad que le llevaría mucho tiempo de desarrollo, evitándole abordar otros contenidos prescriptos, y por ello no la elegiría.

En definitiva, los profesores encuestados proponen orquestaciones centradas en los estudiantes que modelan una actividad de validación. La búsqueda de la expresión algebraica para el área del círculo describe un proceso de generalización al interpretar regularidades y diferencias desde el debate en el pizarrón, pudiendo trasladar lo verbal a lo simbólico. Se trata de un problema porque el camino requiere que el estudiante movilice conocimientos geométricos y analíticos precedentes para interpretar y construir los nuevos. La secuenciación del uso de los deslizadores fue pensada para darle solución al problema a través de la exploración, conjeturación y validación; constituyéndose dentro de la categoría: Desplazamiento para validar/invalidar una conjetura.

Conclusiones

De acuerdo con la información recabada durante las entrevistas se observa que la utilización habitual de GeoGebra en las clases de Matemática es, en dos de los tres casos, para realizar orquestaciones centradas en el profesor (Trouche, 2004). Uno de los tres docentes manifiesta conocer el apartado de recursos de la plataforma online y lo implementa en sus clases. En particular, para la enseñanza del área del círculo, uno de ellos aborda la construcción de la expresión mientras que los demás mencionan la integración con ecuaciones y operaciones. Se trata de un contenido que está dirigido a segundo año de la escuela secundaria, según el diseño curricular, pero su experiencia manifiesta que es trabajado en todo el ciclo básico.

Al momento de seleccionar uno de los recursos para dar desarrollo a una actividad áulica que busque la expresión algebraica en cuestión, todos los profesores escogen R1 por sobre R2 y R3 dado que identifican como obstáculos (Balacheff, 2000) el trabajo con figuras no euclidianas o el abordaje de contenidos más complejos respectivamente. Caracterizan al recurso elegido como intuitivo, dinámico, completo y más cercano a la manipulación tangible. Las modificaciones que le realizarían son, en mayor medida, para limitar la información que contiene el recurso (expresión algebraica y oraciones) y, en menor medida, sobre cómo se presenta el gráfico (color del polígono y escala del eje x). De aquí se infiere que el recurso tal como se presenta en la plataforma no sería trasladado al aula para el trabajo con el contenido.

Otro punto en común es la percepción de la actividad como posible, es decir, que los diversos estudiantes lograrían recorrerla y llegar al objetivo: construir la expresión algebraica del área del círculo. Sin embargo, una de las profesoras menciona al tiempo como un factor decisivo para prescindir de la propuesta. Este hecho entra en conflicto con una las ventajas de los recursos de GeoGebra: el ahorro del tiempo, dado que ya están contruidos para ser modificados a voluntad. Aun así, queda explícita la complejidad de la realidad en la clase y cómo las actividades de exploración, deducción y debate quedan sujetas tanto a las decisiones docentes como a la actitud de los estudiantes que las enfrentan.

En todos los casos, en torno a la actividad con R1, elaboran orquestaciones centradas en el estudiante (Trouche, 2003); contraponiéndose a algunas de sus prácticas precedentes. La secuenciación del problema se caracteriza por la visualización, la exploración, la elaboración de conjeturas, la validación y el debate. Es decir, la propuesta no se concentra en la interactividad unívoca entre el estudiante y el software, sino que adquiere carácter colectivo en la interacción que media el docente (Balacheff, 2000). Las pruebas pragmáticas (Balacheff, 1999) que se registrarían a través del recurso dinámico serían trasladadas al pizarrón para analizar los elementos invariantes a medida que los lados del polígono aumentan. La validación que ocurre a nivel visual (Lupinacci, 2023) se completaría con el razonamiento del lenguaje simbólico asociado. Así la experiencia no queda reducida a la visión del recurso y en cambio se alza como un puente para descubrir y comprender (Zimmermann y Cunningham, 1991) la expresión algebraica del área del círculo.

El recorrido que proponen nutre de significado a la simbología. La visualización que progresaría con el accionar de los deslizadores, según la consigna, permite reorganizar el polígono en términos de una nueva figura (el rectángulo), de la que los estudiantes sabrían cómo calcular el área una vez que interpreten las dimensiones de los lados. Los conceptos que se obviaban a nivel simbólico quedarían ilustrados proporcionando una prueba en sí mismos (Arcavi, 2003). Aquí la expresión se ve despojada de la magia que la enseñanza tradicional le otorga y cobra sentido como un proceso de generalización (Serres Voisin, 2011) mediante la construcción de conjeturas fundamentadas matemáticamente (Bonelo-Ayala et al., 2024). Es en espacios de creatividad como este (Drijvers et al., 2024) que los estudiantes podrían vivenciar el verdadero trabajo de la comunidad matemática (Camargo et al., 2006).

Considerando que el estudio del área del círculo no es un contenido aislado, sino que su enseñanza está vinculada de manera inseparable con la longitud de la circunferencia, podría complementarse esta investigación con la utilización de recursos dinámicos que también permitan construir su expresión algebraica. En la misma línea de ampliación sería interesante realizar el estudio de caso con la actividad llevada al aula para recolectar datos sobre el aprendizaje, observando si surgen obstáculos que no fueron previstos y si se trata efectivamente de un desafío posible. Queda vacante a su vez la

aproximación al contenido como iniciación en el pensamiento algebraico para establecer si verdaderamente contribuye a otorgarle sentido al lenguaje simbólico y al uso de las variables.

Bibliografía

Abrate, Delgado y Pochulu (2006). *Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática*. Revista Iberoamericana de Educación 1-9. <https://rieoei.org/historico/deloslectores/1290Abrate.pdf>

Altamirano González, N.C. (2019). *Desde una práctica pedagógica tradicional hacia una práctica pedagógica social en la enseñanza matemática*. Tesis (Magister en Educación Matemática) - Universidad Católica Silva Henríquez. <http://repositorio.ucsh.cl/xmlui/handle/ucsh/2526>

Arcavi, A. (2003). *The role of visual representations in the learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241.

Balacheff, N. (1999). *Aprender la prueba*. En J. Sallantin y J.J. Szczeniarsz (Eds.), El concepto de prueba a la luz de la inteligencia artificial (pp. 197–236). PUF.

Balacheff, N. (2000) *Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas*. En: Gorgorió, N. y Deulofeu, J. Matemáticas y Educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Barcelona: Graó.

Bifano, F. J. y Villella, J. A. (2012). *Saberes contruidos con (en) problemas dinámicos: ¿Otros objetos de saber?* Universidad Nacional de San Martín.

Bonelo-Ayala, Y., Benítez-Mojica, D. y Muñoz-Posso, J. (2024). *Un nuevo teorema geométrico y su aplicación en la construcción de conjeturas a través de un ambiente de geometría dinámica*. Revista Científica, 49(1), 44-61. <https://doi.org/10.14483/23448350.20680>

Camargo L., Samper, C. y Perry, P. (2006) *Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de*

geometría dinámica. Lecturas matemáticas Vol. 27 Núm. 3 Pág. 371-383.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7176377>

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. (2007). *Diseño curricular correspondiente al 2° Año de la Educación Secundaria* (Resolución N° 2495/07). Dirección General de Cultura y Educación.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P. Reed, H. y Gravemeijer, K. (2024). *El profesor y la herramienta: orquestaciones instrumentales en el aula de matemáticas rica en tecnología*. (L. Aparisi, trad). Educ Stud Math 75, 213–234. (Obra original publicada en inglés en 2010).
<https://drive.google.com/file/d/1jqbyT8LQsFAGWZux5WYKt1gdt2c0Hnwg/view?usp=sharing>

González Hernández, N., Garcés Cecilio, W., & Grimaldy Romay, L. (2021). *La visualización en la enseñanza de la matemática. Su empleo mediante el uso del GeoGebra*. Didasc@lia: Didáctica y Educación, 12(4), 130-139.
https://www.researchgate.net/publication/359719121_La_visualizacion_en_la_ensenanza_de_la_matematica_Su_empleo_mediante_el_uso_del_GeoGebra

Lupinacci, L. (2023). *Seminario de Temas Especiales de Matemática. Construcciones robustas y suaves*. Buenos Aires: Universidad Nacional de San Martín.

Pérez Medina, C. (2014). *Enfoques teóricos en investigación para la integración de tecnología digital en la educación matemática*. Perspectiva Educacional. Formación de Profesores. Junio 2014, Vol. 53(2), 129-150.

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. [Traducción de Martin Acosta Gempeler]. Colombia: Universidad Industrial de Santander. (Obra original publicada en 1995)

Restrepo, A. M. (2008). *Génesis instrumental del desplazamiento en Cabri-geometre por alumnos de 11-12 años*. Ponencia presentada en el Congreso Ibero Cabri 2008.

- Salinas, N., y Sgreccia, N. (2017). *Concepciones docentes acerca de la Resolución de Problemas en la escuela secundaria*. NÚMEROS, 94, 23–45. <http://www.sinewton.org/numeros>
- Sánchez Sánchez E. (2003) *La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica*. Educación Matemática 15(2):27-53. <https://doi.org/10.24844/EM1502.02>
- Serres Voisin, Y. (2011). *Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza*. Sapiens. Revista Universitaria de Investigación, 12(1), 122–142.
- Trouche, L. (2004). *Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations*. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9(3), 281–307. <https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5>
- Vergara, M. E. (2018). *Cómo piensan sus clases los docentes de matemática cuando se usa una computadora por alumno*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Quilmes, Bernal, Argentina. <http://ridaa.unq.edu.ar/handle/20.500.11807/2181>
- Vitabar, F. (2014) *Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): GeoGebraTube: el siguiente nivel de la experiencia GeoGebra*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática Nro 38: 143-147. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4870041>
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Editor's introduction: What is mathematical visualization?* En W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), Visualization in teaching and learning mathematics (MAA Notes Número 19)

ANEXO 1: Estructura de las entrevistas

1. Breves datos sobre formación y experiencia: título de formación profesional, antigüedad, zona donde se desempeña, cursos en los que trabaja, si trabajó con GeoGebra en su formación.
2. ¿De qué manera implementa el software GeoGebra en sus clases? ¿Para qué contenidos le resulta conveniente?
3. ¿En qué año de la escuela secundaria desarrolló la enseñanza de las relaciones métricas de la circunferencia? ¿Cómo secuenció el contenido? ¿Tuvo en consideración el software GeoGebra para su enseñanza?
4. ¿Utiliza los recursos gratuitos que ofrece la plataforma GeoGebra? Considerando estos recursos para construir la expresión algebraica del área del círculo, ¿elegiría alguno para llevar a clase? ¿Por qué sí o por qué no? Para el elegido, ¿le haría modificaciones? ¿Cuáles? En caso de no seleccionar ninguno, ¿haciéndoles modificaciones utilizaría alguno? ¿Cuáles?
5. Para el recurso elegido ¿en qué actividad/es se enmarcaría? ¿Con qué preguntas guiaría el trabajo de los estudiantes? ¿Qué esperarían de ellos?

ANEXO 2: Las entrevistas

La profesora A posee el título de Profesora de Matemática e Informática Educativa otorgado por la UNMDP (Universidad Nacional de Mar del Plata) en el año 2003. Durante su formación aprendió a usar Cabri en computadoras de escritorio por lo que, una vez finalizados los estudios, realizó una jornada de capacitación en GeoGebra. Siempre se desempeñó en escuelas secundarias de gestión privada, en Mar del Plata al inicio, y luego en Pilar, Rodríguez y Luján, con estudiantes de todos los años. Durante este tiempo ocupó mayormente el cargo de profesora, pero también fue directora por un año. Puntualmente en Pilar estuvo dedicada de la preparación de estudiantes para las olimpiadas matemáticas. Hoy en día focaliza su trabajo en quinto y sexto año, y desde el año 2010 además ejerce en la UNLu (Universidad Nacional de Luján) donde actualmente es profesora adjunta.

Respecto al uso de GeoGebra lo implementa para mostrar desde su notebook y verificar contenidos de geometría en dos y tres dimensiones y también gráficos de funciones, tanto en secundaria como en la universidad. Específicamente en la escuela, con motivo del examen internacional que rinden los estudiantes, utiliza el software para desarrollar diagramas de Voronoi.

Sobre la enseñanza de las relaciones métricas indica que las llevó adelante en primero y segundo año de manera transversal a otras unidades, por ejemplo, aplicando las fórmulas a operatoria y ecuaciones. Afirmar que los estudiantes de esas escuelas ya tenían las definiciones abordadas desde primaria y que aproximaban π a 3,14. No utilizó GeoGebra porque explica que requiere invertir tiempo de clase que le impediría completar los demás contenidos obligatorios.

En cuanto a los recursos gratuitos de GeoGebra manifiesta desconocerlos. Al observar los seleccionados sobre área del círculo le resulta más intuitivo y cercano a la manipulación tangible R1. Respecto a los demás, descarta a R2 porque la partición en sectores circulares no genera figuras euclidianas y piensa que podría ocasionar confusión en los estudiantes. Sobre el último recurso, R3, expresa que demanda saber más contenidos a los estudiantes para deducir la expresión algebraica. Menciona dos modificaciones para R1: eliminar las oraciones subyacentes porque adelantan

información del razonamiento y agregar en la escala del eje x la equivalencia decimal aproximada de las fracciones de π , dada la falta de familiaridad con las expresiones pero sin eliminarlas ya que refieren al número completo.

La actividad con el recurso elegido que propone la profesora A incluye un enunciado que brinde contexto a la situación: cuál es la cantidad de tela necesaria para cubrir una cama elástica circular. Al indicarle a los estudiantes valores fijos para el radio (2,3) e ir variando los lados del polígono (3,4,5) obtendrían aproximaciones calculando el área de los rectángulos resultantes cuyas medidas constan en la escala. Luego de un tiempo establecido se plasmarían en el pizarrón los resultados para debatir cómo los obtuvieron y evidenciar que, a medida que aumentan los lados, la aproximación es mejor pero no completa el círculo. Por ello al probar con más lados (entre 20 y 25) visualizarían que la variación del área no es tan significativa como entre los valores anteriores, algo que se repite en los distintos radios también. Entonces, considerando el último polígono como el más aproximado ($n=25$) deberían identificar los valores que se mantuvieron fijos y cuáles cambiaron en este caso y en los cálculos previos, pudiendo formalizar la expresión en diálogo con lo visualizado en el recurso.

La profesora A concluye opinando que se trata de una actividad posible de llevar al aula, sin embargo, por los tiempos ajustados que maneja en la escuela donde se desempeña actualmente no podría darle lugar.

El profesor R es Licenciado en Enseñanza de la Matemática recibido de la UTN (Universidad Tecnológica Nacional) en 2020 pero se desempeña en docencia desde hace 22 años, comenzando en su último año del profesorado. Durante la cursada de la formación más reciente tuvo un breve acercamiento a GeoGebra pero eligió al programa Cabri para la enseñanza y aprendizaje de geometrías euclidianas y no euclidianas en el desarrollo de su tesis, por lo que posee más conocimientos de él. Se desempeñó tanto en escuelas secundarias públicas como privadas entre Rodríguez y Luján, en aulas de todos los años (de primero a sexto). Además, ocupó el cargo de vicedirector en una de ellas. Actualmente enseña en cuarto, quinto y sexto año, y también tiene incumbencia en otros niveles: es profesor del Profesorado de Matemática en el ISFD (Instituto Superior de Formación Docente) n°23 de Luján y ayudante de primera en la UNLu.

En sus clases utiliza GeoGebra para el trabajo con funciones, principalmente para verificar las gráficas ya que las aulas cuentan con televisión para compartir pantalla. Para explorar en geometría durante sus clases opta por utilizar Cabri.

En cuanto a las relaciones métricas de la circunferencia menciona haberlas abordado tanto en primer año como en segundo y tercero, y los procedentes (cuarto, quinto y sexto) con saberes derivados que llevaban necesariamente al repaso. La secuenciación del contenido en los primeros años deviene de la diferenciación de las figuras geométricas en el orden: triángulos, cuadriláteros, polígonos y círculos. Para introducir la longitud de la circunferencia propone que los estudiantes consigan objetos circulares para rodearlos con un hilo y comparar luego con la medida del diámetro para discutir el significado de la constante π . Luego se dedica al trabajo con las expresiones de longitud y área para resolver de manera directa o en ecuaciones cuya incógnita es el radio. No tuvo GeoGebra en consideración porque afirma que no le da seguridad con este contenido.

Por otro lado, expresa no conocer los recursos gratuitos de GeoGebra. Después de interactuar con los propuestos para abordar la expresión algebraica del área del círculo explicó que no elegiría R2 porque hay que explicar más conceptos para poder comprender ya que las figuras obtenidas de la partición no son triangulares. Respecto de R3, le gusta más para abordarlo en el ciclo orientado ya que implica la integración de otras expresiones algebraicas para concluir lo buscado. En definitiva, se decide por R1 porque es más intuitivo y dinámico, sin embargo, le haría modificaciones. En principio, cambiaría el escrito por la consigna que le indique a la clase. Tampoco conservaría las fracciones de π y las reemplazaría por decimales con la aproximación que considere $\pi=3,14$.

En la actividad que llevaría adelante con el recurso elegido indicaría fijar un radio y que los estudiantes exploren con los deslizadores variando la cantidad de lados del polígono. A continuación, repetirían la actividad con un radio diferente. Observando los ejes encontrarían las medidas para calcular el área en cada caso (con la calculadora ya que el foco no está en las cuentas sino en los razonamientos consecuentes). Los resultados obtenidos quedarían tabulados en el pizarrón y se propondría a la clase encontrar

regularidades en ambos. Como interrogación hacia el final de la actividad menciona: ¿cuántos lados debería tener el polígono para ocupar el mismo espacio que el círculo? Allí cobraría importancia la línea punteada que aparece luego del movement 3, observándose que las áreas para $n=25$ se aproximan pero no la alcanzan.

El profesor R confía en que los estudiantes pueden llegar a la expresión algebraica buscada siempre que la consigna esté bien pensada para el objetivo, con el recurso en solitario no es suficiente. En este sentido, lo ve posible pasando en el aula, los estudiantes de su escuela cuentan con computadoras para hacer las exploraciones de manera individual.

La profesora M es Licenciada en Educación Matemática de la UNLZ (Universidad Nacional de Lomas de Zamora) desde el 2008. Sin embargo, se desempeña como profesora hace 27 años. Siempre trabajó en secundarias públicas de Luján y en la UNLu como Profesora Adjunta. Dio clase en todos los años exceptuando 4to, pero actualmente enseña en sexto año.

Durante la formación de licenciatura tuvo un acercamiento a GeoGebra que luego completó con capacitaciones. En sus clases de secundaria lo implementa para que exploren con las funciones seno y coseno: les envía un link con un recurso dinámico que les permita explorar y deducir los comportamientos de las funciones trigonométricas cuando varían los parámetros. En la universidad lo utiliza para graficar las soluciones de ecuaciones diferenciales con el mismo objetivo y dinámica: que no aprendan como reproducción memorística sino partiendo de la exploración con un recurso dinámico.

Respecto de la enseñanza de las relaciones métricas de la circunferencia comenta que las trabajó tanto en primero como segundo año. Comienza explicando los elementos de la circunferencia y después analiza la relación entre el radio y el diámetro para abordar las del diámetro con la longitud y el radio con el área. Recuerda que previo al programa Conectar Igualdad llevaba su computadora para mostrar diferentes casos de circunferencias y círculos con r variable, pero luego ya pudo implementarlo con la computadora para cada estudiante y que ellos interactuaran. Mediante la comparación en la puesta en común arribaban a la verificación de las fórmulas.

En cuanto a los recursos gratuitos de Geogebra manifiesta haberlos usado para variedad de contenidos, mayormente en la universidad en la actualidad. Al vincularse con los recursos seleccionados para el desarrollo de la expresión algebraica del área del círculo decide descartar a R3 porque no se relaciona con lo que los estudiantes saben, sino que se orienta más al trabajo algebraico. Por otro lado, le parece interesante R2 pero opta por R1 porque le parece más completo. Algunas de las modificaciones que le parecen provechosas son modificar el idioma del texto, cambiar los colores para que se vean mejor las particiones, repensar la graduación en x (no como fracciones de π sino como decimales) y remover dos frases: la que enuncia la fórmula y su siguiente (la del porcentaje de aproximación con polígonos), ve potencial en las restantes para verificación de las cuentas. Indica que a medida que lo utilice surgirán más modificaciones.

Para llevar la actividad al aula la profesora M establecería un primer momento de exploración bajo la pregunta ¿qué les parece que vamos a trabajar hoy? Para guiar el razonamiento comenzaría con la observación del polígono de lado $n=3$ (triángulo) y $r=2$. Luego de realizar todos los movimientos con los deslizadores indicaría variar el radio para sacar conclusiones con esa figura: el área es menor que la del círculo para todo radio. A continuación, se dedicarían a variar los lados del polígono, operar los deslizadores y calcular el área del rectángulo resultante. En el pizarrón constarían los valores para cada n con el fin de concluir que a medida que aumentan los lados del polígono el área del rectángulo se aproxima a la del círculo. Allí reflexionarían sobre lo que pasarían con $n=40$, ¿las áreas serían equivalentes entonces? Esperando que lleguen a la noción de infinito. Estando bien guiados cree que los estudiantes arribarían a la expresión buscada. La parece una actividad posible de llevar adelante en el contexto de su escuela pidiendo con anticipación las netbooks disponibles en dirección.